Le cadre

Le problème central

Résoudre automatiquement des équations fonctionnelles très générales, qui peuvent comporter à la fois la dérivation et la composition.

Applications

- Calcul formel.
- Combinatoire, analyse d'algorithmes.
- Équations de la physique.
- Logique.

Désavantages recherche formules closes

- En général : pas de solutions sous forme close.
- Calcul d'une forme close est chère.
- Souvent une solution approximative suffit.
- Formules closes $\not\leftrightarrow$ bons algorithmes numériques.

Exemples : $\int e^{x^2}$ et $\int x^{10^{10}} e^x$.

$\longrightarrow$ Approche asymptotique

Asymptotique automatique

Automatisation du calcul asymptotique

- Bonnes propriétés de clôture théoriques.
- Automatisation de calculs dépendant de paramètres.
- Arithmétique rapide pour développements en série.
- Prolongement analytique effectif et resommation.

Transséries d'après Écalle

- Séries avec des exponentielles et des logarithmes :

$$e^{e^z+\frac{2e^z}{\log z}+\frac{6e^z}{\log^2 z}+\cdots}+2\,\frac{e^{e^z+\frac{2e^z}{\log z}+\frac{6e^z}{\log^2 z}+\cdots}}{e^{\Gamma(\log z)}}+\cdots$$

- Permettent de décrire des singularités très violentes.
- Limité dans un premier temps à des comportements asymptotiques fortement monotones (pas d'oscillation).

Cadre effectif

- Fonctions représentées par les équations qu'elles vérifient et des conditions initiales $\longrightarrow$ algèbre différentiel.
- Problème des tests à zéro pour des constantes transcendents $\longrightarrow$ algorithmes heuristiques ou basés sur des conjectures en théorie des nombres (Schanuel).

Résultats et perspectives

Théorème 1. *Soit P un polynome différentiel avec des coefficients dans les transséries. Si, pour des transséries $f < g$, on a $P(f) < 0$ et $P(g) > 0$. Alors il existe une transsérie h avec $f < h < g$ et $P(h) = 0$.*

Théorème 2. *Modulo la conjecture de Schanuel, il existe un algorithme pour développer des fonctions exp-log.*

Exemple 3. $f = \log\log(x\, e^{x\, e^x} + 1) - \exp\exp(\log\log x + x^{-1})$:

$$f = -\frac{\log^2 x}{2\,x} - \frac{\log x}{2\,x} - \frac{\log^3 x}{6\,x^2} - \frac{\log^2 x}{2\,x^2} + O\left(\frac{\log x}{x^2}\right). (x \to \infty)$$

Théorème 4. *Le n-ième terme de la solution en x^{-1} de*

$$f(x) = x^{-1}(1 + f(x+1) + f'(x)^2)$$

peut être calculé en "temps" $O(n\ \log^3 n)$.

Perspectives

- Transséries faiblement oscillantes.
- Resommation des transséries.
- Michael Schmeling : transséries de force supérieure (exemple : solution de $\exp_\infty(x+1) = e^{\exp_\infty x}$.
- Édouard Lucas : prolongement analytique effectif.
- Ces feuilles ont été préparés avec *Edit*.