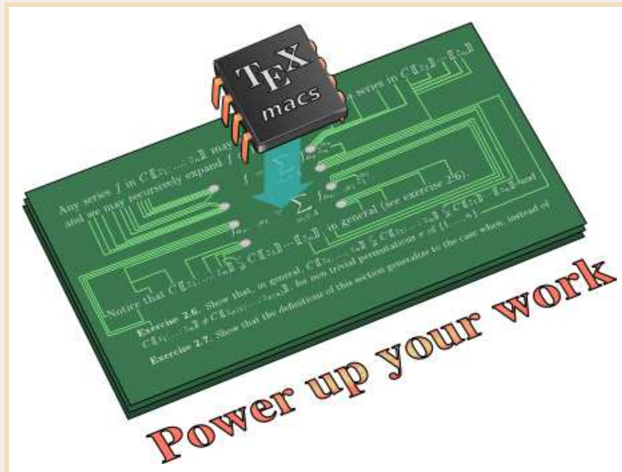
Test de nullité pour des séries définies en termes de solutions à des é.d.p.s



Gecko 2007

http://www.TeXmacs.org

Historique

- Le problème
  - $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_k]]$ anneau différentiel effectif de séries calculables.
  - $f \in \mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_k]]$ solution de $\Sigma_1(f) = \cdots = \Sigma_s(f) = 0$, $\Sigma_i \in \mathbb{A}\{F\}$.
  - f unique solution pour conditions initiales $[z_k^0]\, f, \ldots, [z_k^s]\, f$ données.

    (équation(s) $\longrightarrow$ relation(s) de récurrence)
  - $\mathbb{A}$ admet test de nullité $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{A}\{f\}$ admet test de nullité.
- Cas univarié
  - Denef/Lipschitz [84, 89].
  - Shackell [93], Péladan-Germa/vdH [96].
  - Péladan-Germa [95].
  - Shackell [89], vdH [02].
- Cas multivarié
  - Denef/Lipschitz [84] : tester si un système de é.d.p.l. sur $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_k]$ admet une solution dans $\mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_k]]$ est indécidable.
  - Péladan-Germa [96] : réduction au problème de Ritt.

Rappels

- Réduction de Ritt

  $\mathbb{K}$ corps différentiel, $P \in \mathbb{K}\{F\}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}\{F\}^p$, $H_{\boldsymbol{A}} = I_{A_1} \cdots I_{A_p} S_{A_1} \cdots S_{A_p}$

  $$H\,P = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{A} + R,$$

  $H \in H_{\boldsymbol{A}}^{\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{K}[[\boldsymbol{d}]]^p$, $R \in \mathbb{K}\{F\}$ réduit / $\boldsymbol{A}$.

- Base de Rosenfeld

  $\boldsymbol{A}$ autoréduit et cohérent $\rightsquigarrow$ relations critiques

  $$\begin{array}{rcl} S_1\,\boldsymbol{d}^{\alpha_1}\,A_i - S_2\,\boldsymbol{d}^{\alpha_2}\,A_j & = & \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\Psi}_{i,j} \cdot \boldsymbol{A} & = & 0 \end{array}$$

- Rôle des H
  - Séparation automatique du cas irrégulier $H = 0$ (rajouté à $\boldsymbol{A}$) du cas régulier $H \neq 0$ $\longrightarrow$ algorithme de Boulier [BLOP].
  - Test de nullité : difficile de démontrer $P(f) = 0$, puisque $P(f) \neq 0$ par évaluation $\rightsquigarrow$ focalisation sur cas régulier.
  - Absence de H dans le cas linéaire et « quasi-linéaire ».

Algorithme de Péladan-Germa

Hypothése : $k=1$ ou Σ de dimension différentielle 0

Entrée : $P \in \mathbb{A}\{f\}$

Sortie : résultat du test $P(f)=0$

- Réduction

  Réduire $\Sigma_1(f)=\cdots=\Sigma_s(f)=P(f)=0 \longrightarrow \boldsymbol{A}(f)=\mathbf{0}$.

- Cas non-singulier

  Supposons $H_{\boldsymbol{A}}(f)(0)\neq 0$.

  Alors $[z_1^{i_1}\cdots z_k^{i_k}]f=0$ « en dessous de l'escalier » $\Longrightarrow \boldsymbol{A}(f)=\mathbf{0}$.

- Cas singulier
  - Tester $\boldsymbol{A}(f)=\mathbf{0}$ pour conditions initiales I données $\longrightarrow$

    Trouver les conditions initiales I pour lesquelles $\boldsymbol{A}(f)=\mathbf{0}$.
  - Réponse : clôture de Zariski de la variété non-singulière.

- Équations aux dérivées partielles

  Clôture de Zariski $\longrightarrow$ problème de Ritt.

Algorithme Issac 02

Note : ordre 1 dû à Shackell, mais preuve ne fonctionne pas

Entrée : $P \in \mathbb{A}\{f\}$

Sortie : résultat du test $P(f) = 0$

- Réduction

  $\Sigma_1(f) = \cdots = \Sigma_s(f) = P(f) = 0 \longrightarrow A(f) = \mathbf{0}$.

- Condition $A(\tilde{f}) = \mathbf{0}$ admet une solution avec mêmes cond. init.
  - $A \in \mathbb{K}[[z]](F)$, v valuation en z, d valuation de $[z^v]A$.

    Alors $A(f) = 0$, $f \prec 1$ admet une solution dans $\mathbb{K}[[z^{\mathbb{Q}}]]$.
- Existence de solution $\Rightarrow$ $\tilde{f} = f$

  On doit (et il suffit de) supposer f solution unique dans $\mathbb{L}$.

- Autres avantages
  - Le système Σ peut être singulier.
  - Algorithme relatif.

Algorithme Issac 02

Note : ordre 1 dû à Shackell, mais preuve ne fonctionne pas

Entrée : $P \in \mathbb{A}\{f\}$

Sortie : résultat du test $P(f) = 0$

- Réduction

  $\Sigma_1(f) = \cdots = \Sigma_s(f) = P(f) = 0 \longrightarrow A(f) = \mathbf{0}$.

- Condition $A(\tilde{f}) = \mathbf{0}$ admet une solution avec mêmes cond. init.
  - $A \in \mathbb{K}[[z]]\{F\}$, avec $\deg_{\prec 1} A > 0$.

    [vdH:LN] Alors $P(f) = 0$, $f \prec 1$ admet une solution dans

    $$\mathbb{L} = \mathbb{K}[[\ldots, (\log\log z)^{\mathbb{Q}}, (\log z)^{\mathbb{Q}}, z^{\mathbb{Q}}]].$$

- Existence de solution $\Rightarrow$ $\tilde{f} = f$

  On doit (et il suffit de) supposer f solution unique dans $\mathbb{L}$.

- Autres avantages
  - Le système Σ peut être singulier.
  - Algorithme relatif.

Généralisation aux é.d.p.

- Cadre
  - Ordre total archimédien $\preccurlyeq$ sur $\mathfrak{Z} = z_1^{\mathbb{Q}} \cdots z_k^{\mathbb{Q}}$.
  - Séries réticulées dans $\mathbb{F} = \mathbb{K}[[\mathfrak{Z}]]$.
  - $\delta_1 = z_1 \partial / \partial z_1, \ldots, \delta_k = z_k \partial / \partial z_k$.
  - Ordre admissible total archimédien sur $\boldsymbol{\Delta} = \delta_1^{\mathbb{N}} \cdots \delta_k^{\mathbb{N}}$.
  - $\mathbb{S} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\Delta} F][[\mathfrak{Z}]] \supsetneq \mathbb{F}\{F\}$.
  - $\mathbb{D} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\Delta} F][\boldsymbol{\delta}][[\mathfrak{Z}]]$.
- Idéal différentiel de Newton
  - $P \in \mathbb{S} \longrightarrow$ terme dominant $D_P \in \mathbb{K}\{F\}$.
  - I idéal diff. $\longrightarrow D_I = \{D_P : P \in \mathbb{S}\}$ idéal diff. de Newton.
  - Calculer D_I ?
  - $D_I \not\ni 1 \overset{?}{\Longrightarrow} I$ admet une solution infinitésimale.

Algèbre différentielle asymptotique

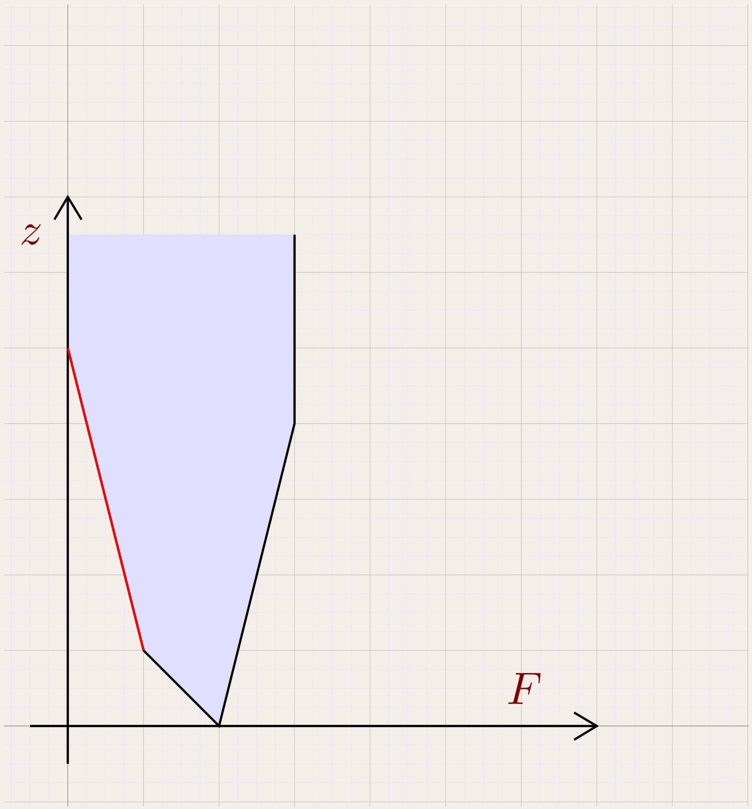
- Réduction asymptotique
  - $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^p$ avec $D_{A_i} \notin \mathbb{K}$.
  - $P \in \mathbb{S}$ asymptotiquement réduit / $\boldsymbol{A} \stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} D_P$ réduit / $D_{\boldsymbol{A}}$.
  - $\boldsymbol{A}$ normal $\stackrel{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} A_i \asymp 1$ et $I_{D_{A_i}} = S_{D_{A_i}} = 1$ pour tout i.
  - Réduction asymptotique de $P \in \mathbb{S}$ par rapport à $\boldsymbol{A}$ normal :

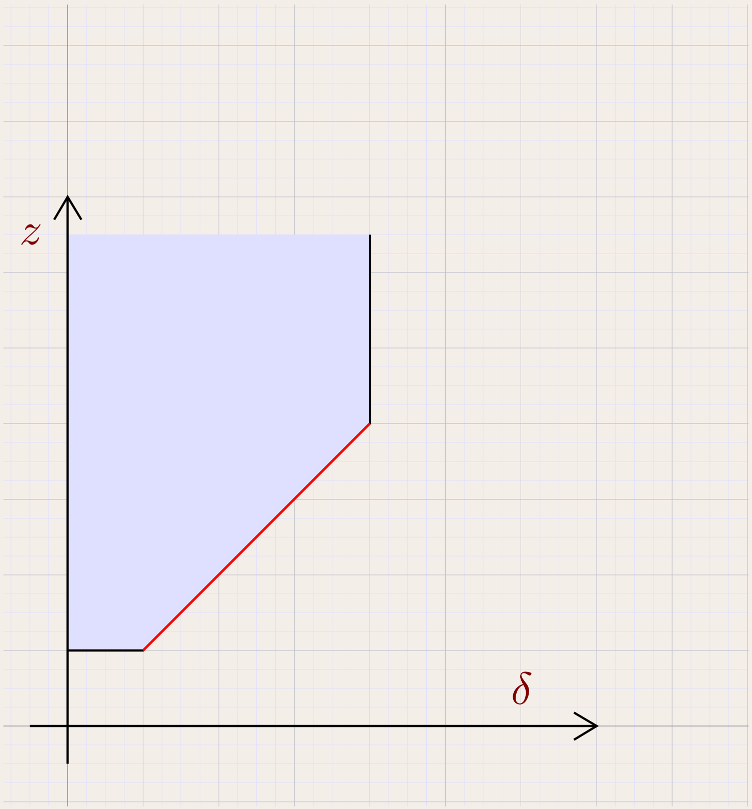
    $$P = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{A} + R,$$

    avec $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{D}^p$, $\boldsymbol{\Theta} \preccurlyeq P$ et R asymptotiquement réduit / $\boldsymbol{A}$.
- Problème
  - Normalité de $\boldsymbol{A}$ est (à peu près) essentiel.
  - Remarque : OK dans le cas linéaire.
  - Remarque : encore OK si $D_{\boldsymbol{A}}$ est linéaire ($\boldsymbol{A}$ quasi-linéaire).

Polygônes de Newton

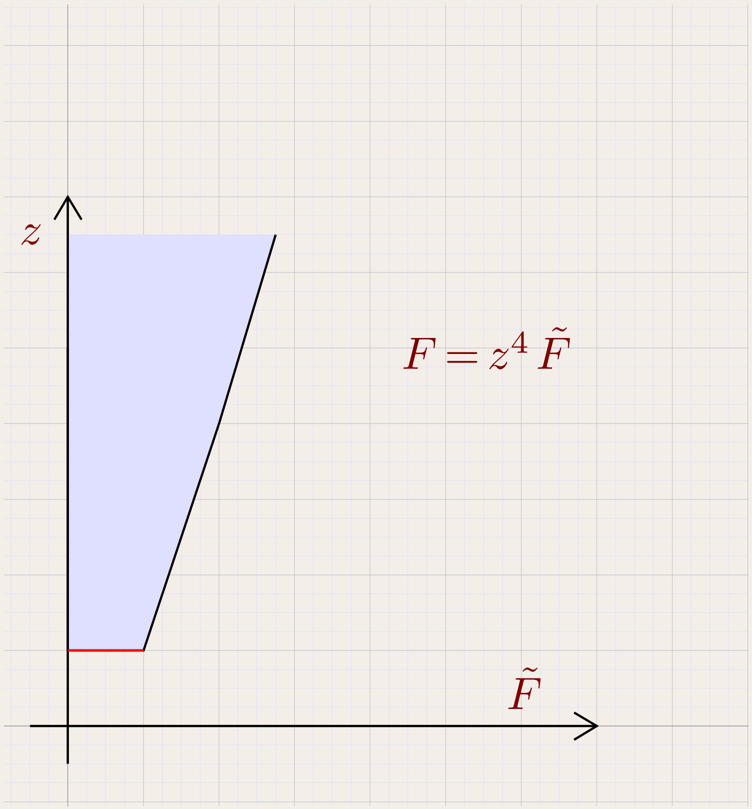
$$P = \overbrace{z^5 - z^6}^{P_0} + \overbrace{z^2\,F - 3\,z\,\delta\,F + z^4\,\delta^4\,F}^{P_1} + \overbrace{F^2 - z\,\delta\,F\delta^2\,F}^{P_2} + \overbrace{z^4\,F^3}^{P_3}$$

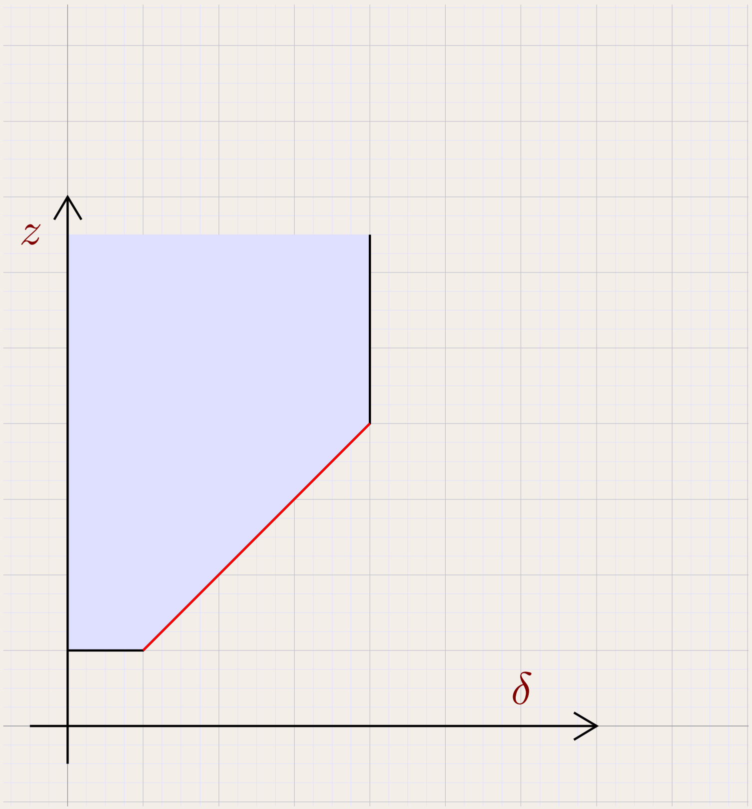




Polygônes de Newton

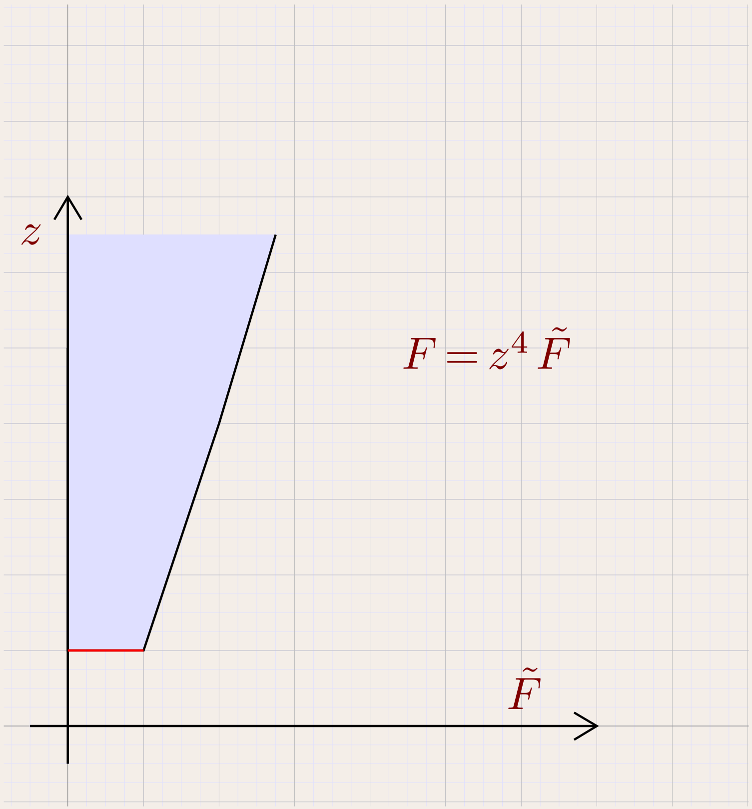
$$P = \overbrace{z^5 - z^6}^{P_0} + \overbrace{z^2\,F - 3\,z\,\delta\,F + z^4\,\delta^4\,F}^{P_1} + \overbrace{F^2 - z\,\delta\,F\,\delta^2\,F}^{P_2} + \overbrace{z^4\,F^3}^{P_3}$$

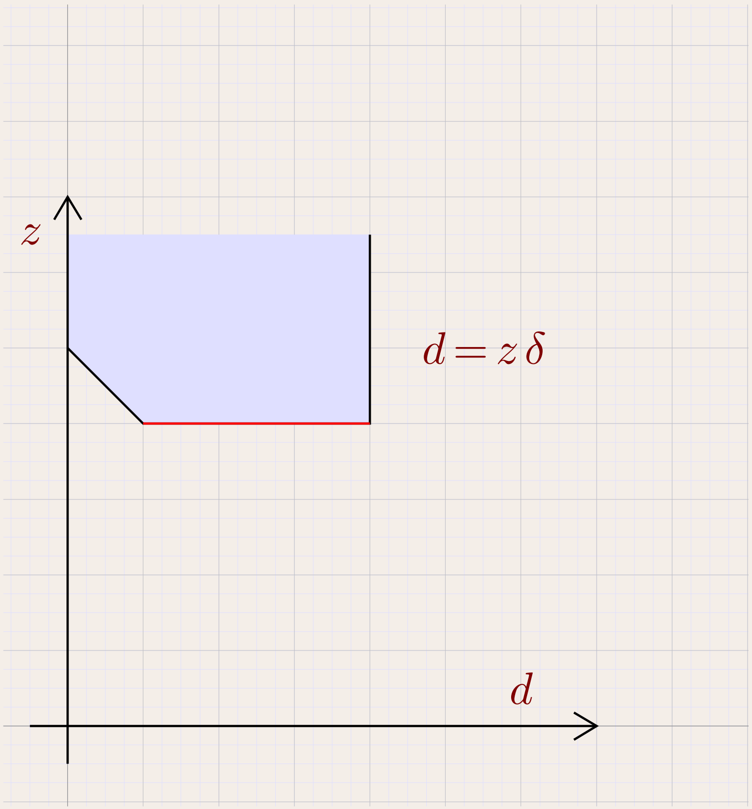




Polygônes de Newton

$$P \;=\; \overbrace{z^5 - z^6}^{P_0} + \overbrace{z^2\,F - 3\,z\,\delta\,F + z^4\,\delta^4\,F}^{P_1} + \overbrace{F^2 - z\,\delta\,F\,\delta^2\,F}^{P_2} + \overbrace{z^4\,F^3}^{P_3}$$





Gymnastique

- Conjugaisons additifs et multiplicatifs

$$\begin{array}{rcl} P(F) & \longrightarrow & P_{+\varphi}(F) = P(\varphi + F) \\ P(F) & \longrightarrow & P_{\times\varphi}(F) = P(\varphi\, F) \end{array}$$

  - Réduction de Ritt

$$\begin{array}{rcl} v_{P_{+\varphi}} & = & v_P \\ I_{P_{+\varphi}} & = & I_{P,+\varphi} \\ S_{P_{+\varphi}} & = & S_{P_{+\varphi}} \end{array}$$

- Changements de dérivations

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k) & \longrightarrow & \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{z}^{\lambda_1 \boldsymbol{\kappa}}\, \delta_1, \ldots, \boldsymbol{z}^{\lambda_k \boldsymbol{\kappa}}\, \delta_k) \qquad (\boldsymbol{z}^{\lambda_1 \boldsymbol{\kappa}}, \ldots \boldsymbol{z}^{\lambda_k \boldsymbol{\kappa}} \prec 1) \\ P & \longrightarrow & P' \end{array}$$

  - Commutativité asymptotique

$$\begin{array}{rcl} [d_i, d_j] & = & \lambda_j\, \kappa_i\, \boldsymbol{z}^{\lambda_i \boldsymbol{\kappa}}\, d_j - \lambda_i\, \kappa_j\, \boldsymbol{z}^{\lambda_j \boldsymbol{\kappa}}\, d_i \prec 1 \\ [d_i, a] & = & \delta_i(a)\, \boldsymbol{z}^{\lambda_i \boldsymbol{\kappa}} \prec 1 \end{array}$$

  - Réduction de Ritt

$$\begin{array}{rcl} v_{P'} & = & v_P \\ I_{P'} & = & I_P' \\ S_{P'} & = & S_P' \end{array}$$

- Co-réduction (bases standard / cône tangent, Mora)
  - Remarque : $\mathbb{K}[\delta_1, \ldots, \delta_n] \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.
  - Remarque : $\mathbb{K}[[\delta_1, \ldots, \delta_n]] \cong \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
  - Théorie duale pour

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}^* &= \mathbb{K}[[\boldsymbol{\Delta} F]]_{\mathrm{pol}} \llbracket \mathfrak{Z} \rrbracket \\
\mathbb{D}^* &= \mathbb{K}[[\boldsymbol{\Delta} F]]_{\mathrm{pol}}[[\boldsymbol{\delta}]] \llbracket \mathfrak{Z} \rrbracket
\end{aligned}
$$

Gymnastique

- Conjugaisons additifs et multiplicatifs

$$\begin{array}{rcl} P(F) & \longrightarrow & P_{+\varphi}(F) = P(\varphi + F) \\ P(F) & \longrightarrow & P_{\times\varphi}(F) = P(\varphi\, F) \end{array}$$

  - Réduction de Ritt

$$\begin{array}{rcl} v_{P_{\times\varphi}} & = & v_P \\ I_{P_{\times\varphi}} & = & I_{P,\times\varphi} \\ S_{P_{\times\varphi}} & = & S_{P_{\times\varphi}} \end{array}$$

- Changements de dérivations

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k) & \longrightarrow & \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{z}^{\lambda_1 \boldsymbol{\kappa}}\, \delta_1, \ldots, \boldsymbol{z}^{\lambda_k \boldsymbol{\kappa}}\, \delta_k) \qquad (\boldsymbol{z}^{\lambda_1 \boldsymbol{\kappa}}, \ldots \boldsymbol{z}^{\lambda_k \boldsymbol{\kappa}} \prec 1) \\ P & \longrightarrow & P' \end{array}$$

  - Commutativité asymptotique

$$\begin{array}{rcl} [d_i, d_j] & = & \lambda_j\, \kappa_i\, \boldsymbol{z}^{\lambda_i \boldsymbol{\kappa}}\, d_j - \lambda_i\, \kappa_j\, \boldsymbol{z}^{\lambda_j \boldsymbol{\kappa}}\, d_i \prec 1 \\ [d_i, a] & = & \delta_i(a)\, \boldsymbol{z}^{\lambda_i \boldsymbol{\kappa}} \prec 1 \end{array}$$

  - Réduction de Ritt

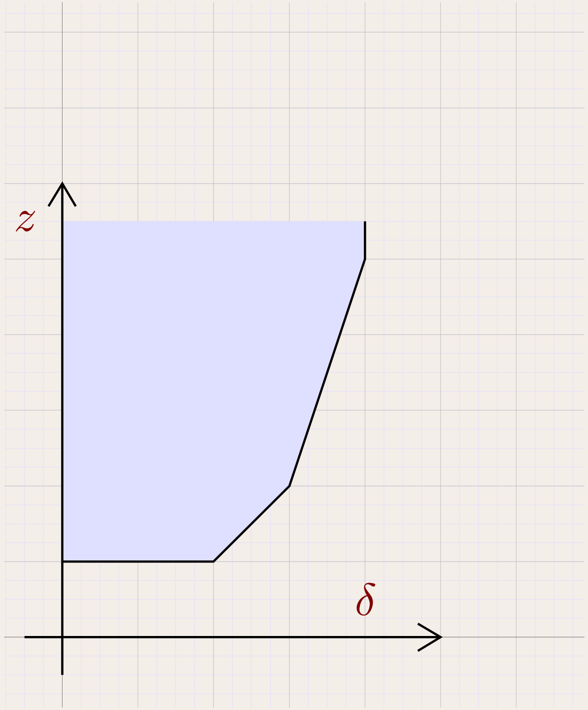
$$\begin{array}{rcl} v_{P'} & = & v_P \\ I_{P'} & = & I'_P \\ S_{P'} & = & S'_P \end{array}$$

- Co-réduction (bases standard / cône tangent, Mora)
  - Remarque : $\mathbb{K}[\delta_1, \ldots, \delta_n] \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.
  - Remarque : $\mathbb{K}[[\delta_1, \ldots, \delta_n]] \cong \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
  - Théorie duale pour

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^* &= \mathbb{K}[[\boldsymbol{\Delta} F]]_{\mathrm{pol}} [\![\mathfrak{Z}]\!] \\ \mathbb{D}^* &= \mathbb{K}[[\boldsymbol{\Delta} F]]_{\mathrm{pol}}[[\boldsymbol{\delta}]] [\![\mathfrak{Z}]\!] \end{aligned}$$

Algorithme

Calcul d'un base asymptotique pour $\{P, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_s\}$ par rapport à $\boldsymbol{\delta}$



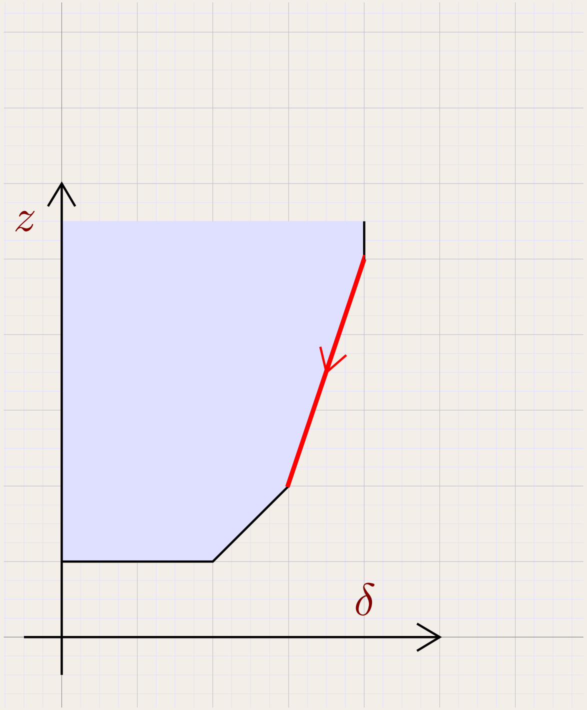
Étape 1

- Calculer base de Rosenfeld $\boldsymbol{A}$.
- Penser $\boldsymbol{A}$ quasi-linéaire modulo $\times z^k$.
- Pour $\boldsymbol{d}$ suffisamment « petit »,

  $\boldsymbol{A}_{\text{lin}}$ base asymptotique pour $\boldsymbol{d}$.

Algorithme

Calcul d'un base asymptotique pour $\{P, \Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ par rapport à $\boldsymbol{\delta}$



Étape 2

- Relations asymp. critiques pour $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

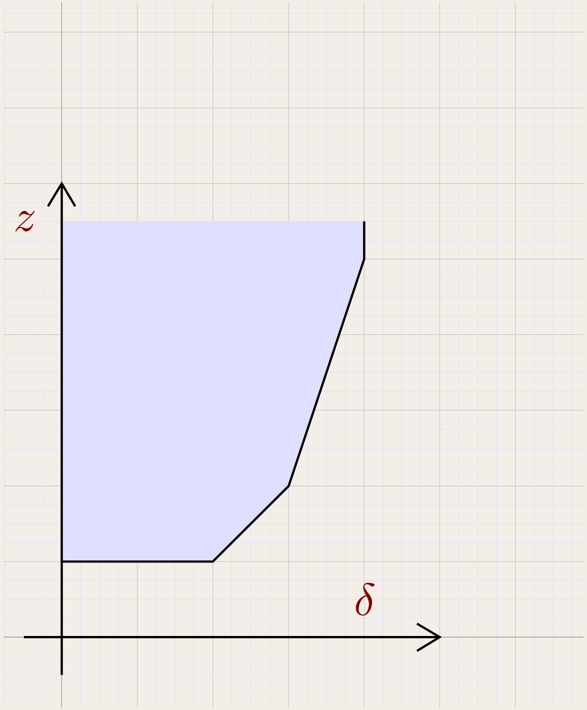
- Suite exacte :

$$\mathbb{K}[[\boldsymbol{d}]]^{D_{\boldsymbol{\Omega}}} \to \mathbb{K}[[\boldsymbol{d}]]^{D_{\boldsymbol{A}}} \to \mathbb{K}[[\boldsymbol{d}]] \to \mathbb{K}[[\boldsymbol{d}]] / (\boldsymbol{A}_{\text{lin}})$$

- Cône tangent.
- Co-base asymptotique $\boldsymbol{A}^*$ pour $\boldsymbol{d}$.

Algorithme

Calcul d'un base asymptotique pour $\{P, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_s\}$ par rapport à $\boldsymbol{\delta}$



Étape 3

– Rels. asymp. co-critiques pour $\boldsymbol{A}^*$

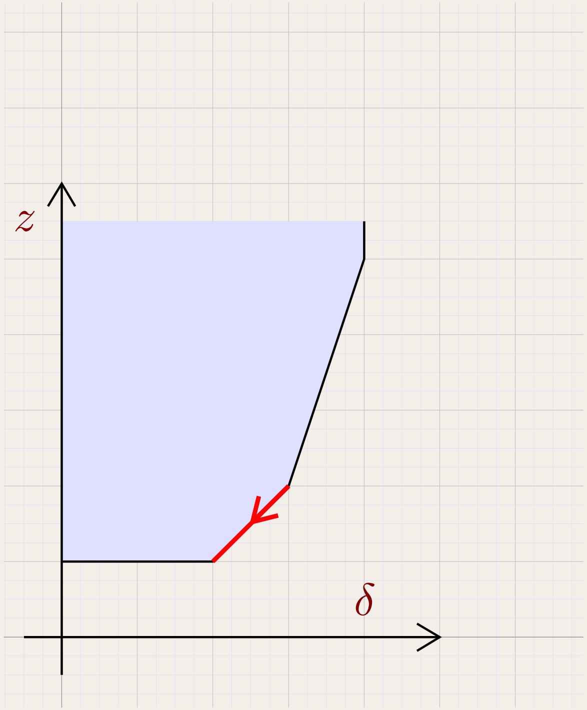
$$\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \boldsymbol{A}^* = 0.$$

– Aussi rels. as. crit. pour $\boldsymbol{d}'$ suivant.

– $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^*$ base asymptotique pour $\boldsymbol{d}'$.

Algorithme

Calcul d'un base asymptotique pour $\{P, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_s\}$ par rapport à $\boldsymbol{\delta}$

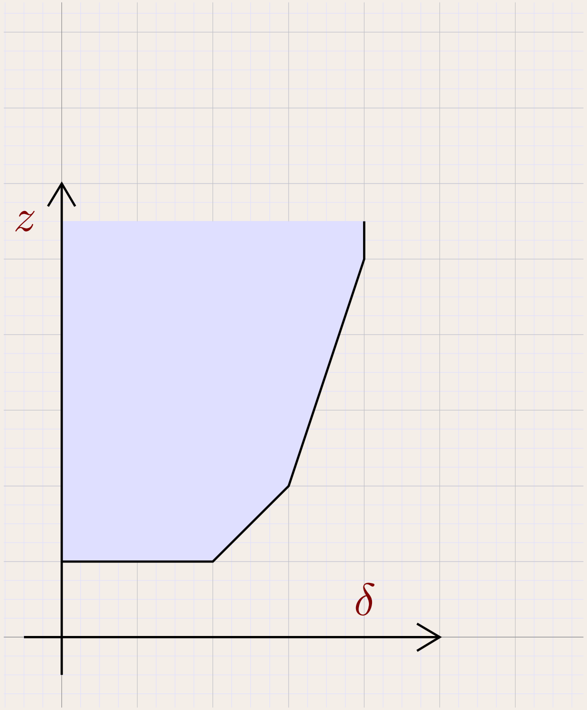


Étape 4

- Cône tangent.
- Co-base asymptotique $\boldsymbol{B}^*$ pour $\boldsymbol{d}'$.

Algorithme

Calcul d'un base asymptotique pour $\{P, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_s\}$ par rapport à $\boldsymbol{\delta}$



Étape 5

- Base asymptotique $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^*$ pour $\boldsymbol{\delta}$.
- Solution dans $\mathbb{K}[\log \boldsymbol{z}]\,[\![\mathfrak{Z}]\!]$.