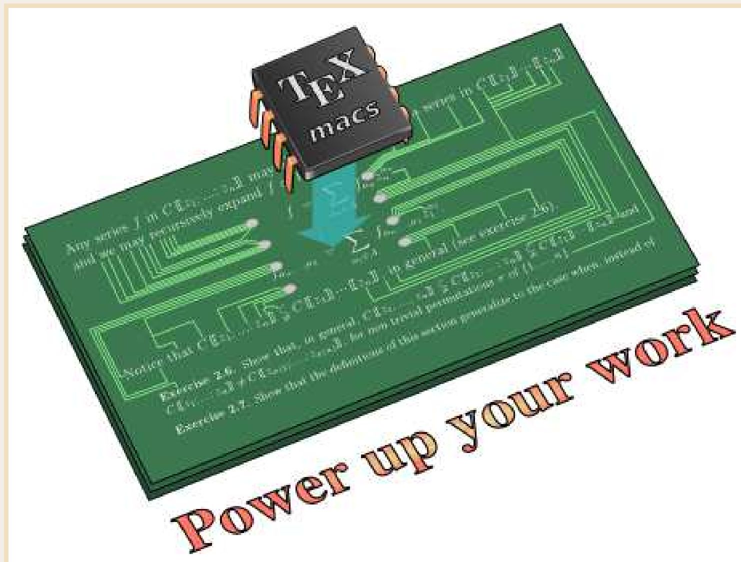
Transséries et Analyse Complexe Effective

Soutenance d'habilitation de Joris van der Hoeven



Orsay, 29 avril 2008

http://www.TeXmacs.org

Partie I : Transséries

[LN] JvdH. *Transseries and real differential algebra*, volume 1888 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2006.

[CT] M.C. Schmeling. *Corps de transséries*. PhD thesis, Université Paris-VII, 2001.

[1] JvdH. Operators on generalized power series. *Journal of the Univ. of Illinois*, 45(4):1161–1190, 2001.

[2] JvdH. A differential intermediate value theorem. In B. L. J. Braaksma, G. K. Immink, M. van der Put, and J. Top, editors, *Differential equations and the Stokes phenomenon*, pages 147–170. World Scientific, 2002.

[3] Matthias Aschenbrenner, Lou van den Dries, and JvdH. Differentially algebraic gaps. *Selecta Mathematica*, 11(2):247–280, 2005.

[4] JvdH. Transserial Hardy fields. Prépublication 2006-37, Univ. Paris-Sud, 2006. Accepted for publication.

[5] JvdH. Complex transseries solutions to algebraic differential equations. Prépublication 2001-34, Orsay, 2001.

[1] JvdH. Effective complex analysis. *JSC*, 39:433–449, 2005.

[2] JvdH. On effective analytic continuation. *MCS*, 1(1):111–175, 2007.

[3] JvdH and J.R. Shackell. Complexity bounds for zero-test algorithms. *JSC*, 41:1004–1020, 2006.

[4] JvdH. A new zero-test for formal power series. In Teo Mora, editor, *Proc. ISSAC '02*, pages 117–122, Lille, France, July 2002.

[5] JvdH. Counterexamples to witness conjectures. *JSC*, 41:959–963, 2006.

[6] JvdH. Computations with effective real numbers. *TCS*, 351:52–60, 2006.

[7] JvdH. Effective real numbers in Mmxlib. In D. Saunders, editor, *Proc. ISSAC '06*, Genova, Italy, July 2006.

[8] JvdH. Zero-testing, witness conjectures and differential diophantine approximation. Prépublication 2001-62, Orsay, 2001.

[9] JvdH. Majorants for formal power series. Prépublication 2003-15, Orsay, 2003.

[10] JvdH. D-algebraic power series. Prépublication 2001-61, Orsay, 2001.

[11] JvdH. Fast evaluation of holonomic functions. *TCS*, 210:199–215, 1999.

[12] JvdH. Fast evaluation of holonomic functions near and in singularities. *JSC*, 31:717–743, 2001.

[13] Joris van der Hoeven. Efficient accelero-summation of holonomic functions. *JSC*, 42(4):389–428, 2007.

[14] JvdH. Around the numeric-symbolic computation of differential Galois groups. *JSC*, 42:236–264, 2007.

[15] JvdH. Lazy multiplication of formal power series. In W. W. Küchlin, editor, *Proc. ISSAC '97*, pages 17–20, Maui, Hawaii, July 1997.

[16] JvdH. Relax, but don't be too lazy. *JSC*, 34:479–542, 2002.

[17] JvdH. Relaxed multiplication using the middle product. In Manuel Bronstein, editor, *Proc. ISSAC '03*, pages 143–147, Philadelphia, USA, August 2003.

[18] Joris van der Hoeven. New algorithms for relaxed multiplication. *JSC*, 42(8):792–802, 2007.

[19] JvdH. Newton's method and FFT trading. Prépublication 2006-17, Orsay, 2006.

Perspectives

- **Transséries**
  - Théorème de valeurs intermédiaires pour les fonctionnelles
  - Correspondance avec les nombres surréels
  - Lien avec la désingularisation des champs de vecteurs
  - Accéléro-sommation de transséries
  - Théorie des modèles pour les H-corps et les corps asymptotiques
- **Analyse complexe effective**
  - Implantations dans Mathemagix
  - Algorithmique efficace aux différents niveaux de la hiérarchie numérique
  - Columbus : outil d'exploration graphique de fonctions analytiques
  - Fonctions analytiques calculables en plusieurs variables
  - Etc.

Transséries

- **Exemples**

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots \\
f_2 &= x + \log x + \log\log x + \cdots \\
f_3 &= \mathrm{e}^{x + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots} + \frac{\mathrm{e}^{x + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{x + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots}}{x^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

- **Motivations et histoire**
  - Calcul asymptotique universel pour des fonctions réelles

- L-fonctions de Hardy et corps de Hardy
- Non-oscillation $\longrightarrow$ ordres de croissance

- **Définition**

  (Dahn-Göring, Écalle, vdH)

  Soit $x \succ 1$ une variable « infiniment grande »

  Une **transsérie** $f \in \mathbb{T}$ est une série formelle généralisée

$$f = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{T}} f_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m},$$

  avec $f_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{R}$ et où les **transmonômes** $\mathfrak{m} \in \mathfrak{T}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \log_l x = \log \overset{l\times}{\cdots} \log x \qquad \text{ou} \\ \mathfrak{m} &= \exp g, g \in \mathbb{T}_{\succ} \end{aligned}$$

  avec $\mathbb{T}_{\succ} = \{f \in \mathbb{T} : \operatorname{supp} f \succ 1\}$

- **Opérations**

(Écalle, vdH, van den Dries/Macintyre/Marker)

– $\mathbb{T}$ est un corps
– $\mathbb{T}$ est totalement ordonné par $\leqslant$
– $\mathbb{T}$ est un corps asymptotique (valué) pour $\preccurlyeq$
– $\mathbb{T}$ est stable pour ∂ et $\int$, qui sont compatibles avec $\leqslant$ et $\preccurlyeq$
– $\mathbb{T}$ est stable par $\circ$ et $\circ^{-1}$, qui sont compatibles avec $\leqslant$, $\preccurlyeq$ et ∂
– $\mathbb{T}$ est réel clos
– $\mathbb{T}$ est différentiellement réel clos

Exemples

- **Transséries réticulées**

Mmx ≫	#use"numerix"; #use"algebramix"; #use"symbolix"; #use"analyziz"; #use"multimix";
Mmx ≫	$x :=$ infinity('x);
Mmx ≫	$\frac{1}{x-1}$
Mmx ≫	$\frac{1}{1-x^{-1}-\exp(-x)}$
Mmx ≫	integrate(exp($-x^2$), x)
Mmx ≫	lengthen (product(x, x), 2)
Mmx ≫	integrate(x^x, x)
Mmx ≫	product($\log x$, x)
Mmx ≫	

- **Transséries à échelle finie**

Mmx ≫	$\zeta(x)$
Mmx ≫	$\zeta\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\zeta(x)$
Mmx ≫	fixed_point($f \mapsto x + f \circ \sqrt{x}$)
Mmx ≫	

- **Transséries bien fondées**

```
Mmx >> fixed_point(f ↦ 1/x + f ∘ x^2 + f ∘ exp(log(x)^2))
Mmx >> fixed_point(f ↦ x + f ∘ log(x))
Mmx >> fixed_point(f ↦ 1/x + f ∘ exp(x))
Mmx >> fixed_point(f ↦ 1/x + f ∘ (exp(x) + x))
Mmx >>
```

- **Transséries imbriquées**

$$f = \mathrm{e}^{\sqrt{x} + f(\log x)} = \mathrm{e}^{\sqrt{x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log \log x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log \log \log x} + \mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$$

- **Transséries de forces supérieures**

$$\begin{aligned} \exp_{\omega}(x+1) &= \mathrm{e}^{\exp_{\omega}(x)} \\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_{\omega}(\exp_{\omega^2}(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f) = 0$	

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f) = 0$	$P(f) = 0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f) = \operatorname{val} P_{+f}$	

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f)=\operatorname{val} P_{+f}$	$\mu_{P,\prec\mathfrak{v}}(f)=\operatorname{val}_{\prec\mathfrak{v}} P_{+f}$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f)=\operatorname{val} P_{+f}$	$\mu_{P,\prec\mathfrak{v}}(f)=\deg_{\prec\mathfrak{v}} P_{+f}$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f) = 0$	$P(f) = 0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f) = \operatorname{val} P_{+f}$	$\mu_{P, \prec \mathfrak{v}}(f) = \deg_{\prec \mathfrak{v}} P_{+f}$

Polygones de Newton différentiels

$$P(f) = p(f, f', \ldots, f^{(r)}) = 0, \quad f \prec \mathfrak{v}$$

Pentes ne se lisent pas directement à partir du « polygone de Newton »

$$P = P_0 + \cdots + P_d$$

$$P_2 = (F')^2 - F F'' + \cdots$$

Ascensions

$P{\uparrow}$ unique polynôme différentiel avec

$$(P{\uparrow})(f \circ \mathrm{e}^x) = P(f) \circ \mathrm{e}^x$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
F'{\uparrow} &= \frac{F'}{\mathrm{e}^x} \\
F''{\uparrow} &= \frac{F'' - F'}{\mathrm{e}^{2x}} \\
F'''{\uparrow} &= \frac{F''' - 3\,F'' + 2\,F'}{\mathrm{e}^{3x}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ascensions

$P\uparrow$ unique polynôme différentiel avec

$$(P\uparrow)(f \circ \mathrm{e}^x) = P(f) \circ \mathrm{e}^x$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
P &= (F')^2 - FF'' \\
P\uparrow &= \frac{(F')^2 - FF'' + FF'}{\mathrm{e}^{2x}} \\
P\uparrow\uparrow &= \frac{FF'}{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} + \frac{(F')^2 - FF'' + FF'}{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} \\
&\vdots \\
N_P &= FF'
\end{aligned}$$

Ascensions

$P{\uparrow}$ unique polynôme différentiel avec

$$(P{\uparrow})(f \circ \mathrm{e}^x) = P(f) \circ \mathrm{e}^x$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
P &= (F')^2 - F F'' \\
P{\uparrow} &= \frac{(F')^2 - F F'' + F F'}{\mathrm{e}^{2x}} \\
P{\uparrow\uparrow} &= \frac{F F'}{\mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} + \frac{(F')^2 - F F'' + F F'}{\mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} \\
&\vdots \\
N_P &= F F'
\end{aligned}$$

Conséquence :

$$1 \prec \log \ell \prec \log x \implies P(\ell) \sim \frac{\ell\, \ell'}{x}$$

Polynômes de Newton différentiels

Théorème. *Il existe un unique* $N_P \in \mathbb{R}\{F\}$, *tel que*

$$c_{P\uparrow_l} = N_P$$

pour tout l *suffisamment grand, et*

$$N_P \in \mathbb{R}[F]\,(F')^{\mathbb{N}}.$$

Définition. $\mathfrak{m} \prec \mathfrak{v}$ *est un monôme débuteur* $\Longleftrightarrow N_{P_{\times\mathfrak{m}}} \notin \mathbb{R}\,F^{\mathbb{N}}$

Monômes débuteurs

Lemme. *Pour* $i < j$ *avec* $P_i \neq 0$, $P_j \neq 0$, *il existe un unique* (i, j)*-égalisateur* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{T}$ *tel que* $N_{(P_i + P_j) \times \mathfrak{e}}$ *ne soit pas homogène.*

Monômes débuteurs

Lemme. *Pour i avec $P_i \neq 0$, on a*

$$\mathfrak{m} \textit{ est un monôme débuteur pour } P_i(f) = 0$$

$$\Big\Updownarrow$$

$$\mathfrak{m}^\dagger = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}} \textit{ est une solution de } R_{P_i}(g) = 0 \textit{ modulo } \frac{1}{x \log x \log_2 x \cdots}$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}} + \cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *et* $f < g \in \mathbb{T}$ *avec* $P(f)\,P(g) < 0$. *Alors il existe un* $h \in \mathbb{T}$ *avec* $f < h < g$ *et* $P(h) = 0$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial - a \quad ou \quad \partial^2 - (2\,a + b^\dagger)\,\partial + (a^2 + b^2 - a' + a\,b^\dagger).$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}}+\cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P\in\mathbb{T}\{F\}$ *et* $f<g\in\mathbb{T}$ *avec* $P(f)\,P(g)<0$. *Alors il existe un* $h\in\mathbb{T}$ *avec* $f<h<g$ *et* $P(h)=0$.

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial-a \quad ou \quad \partial^2-(2\,a+b^{\dagger})\,\partial+(a^2+b^2-a'+a\,b^{\dagger}).$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}} + \cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *et* $f < g \in \mathbb{T}$ *avec* $P(f)\, P(g) < 0$. *Alors il existe un* $h \in \mathbb{T}$ *avec* $f < h < g$ *et* $P(h) = 0$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial - a \quad ou \quad \partial^2 - (2\,a + b^{\dagger})\,\partial + (a^2 + b^2 - a' + a\,b^{\dagger}).$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}} + \cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *et* $f < g \in \mathbb{T}$ *avec* $P(f)\,P(g) < 0$. *Alors il existe un* $h \in \mathbb{T}$ *avec* $f < h < g$ *et* $P(h) = 0$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial - a \quad ou \quad \partial^2 - (2\,a + b^\dagger)\,\partial + (a^2 + b^2 - a' + a\,b^\dagger).$$

Généralisations

Construction. *$\exists$ corps $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ de transséries complexes réticulées.*

La construction fait intervenir une infinité de choix comme

$$\begin{aligned} z &\prec\succ 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} &\prec\succ 1 \\ \mathrm{e}^{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}} &\prec\succ 1 \end{aligned}$$

La construction en tant que « corps fort » est unique.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. *$\exists$ des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f\prec\mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\}\setminus\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f\prec\mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\}\setminus\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f \prec \mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$*.*

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\} \setminus \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$*.*

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1*.*

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f\prec\mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$*.*

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\}\setminus\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$*.*

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1*.*

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f \prec \mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$*.*

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\} \setminus \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$*.*

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1*.*

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f \prec \mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\} \setminus \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Conjecture. *Il existe une correspondance entre la classe des nombres surréels et la classe des corps de transséries de forces ordinales.*

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de $\mathbb{T}$.*

Théorème. *Soit $\mathcal{T}$ un corps de Hardy transsériel et $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ sa clôture différentiellement algébrique dans $\mathbb{T}$. Alors $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant $\mathcal{T}$.*

Théorème. *$\mathcal{T}$: corps de Hardy transsériel. $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy. $\mathcal{H}$ Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors $\mathcal{H}$ se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec $\leqslant$ appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec $\preccurlyeq$ appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps K admet une lacune $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, alors K admet **deux** clôtures Liouvilliennes avec $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.*

Théorème. (ADH) *$\exists$ corps Liouville clos de transséries K, avec $\gamma \notin K$, mais $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. Or $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.*

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* **deux** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* **deux** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec\succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.

Analyse complexe effective

- **Objectif**

  Automatiser autant de l'analyse complexe que possible

- **Rôle central de l'analyse complexe**

  - La plupart des problèmes explicites de l'analyse et du calcul formel admettent des solutions analytiques ou semi-analytiques.
  - Abordable en temps raisonnable, car arithmétique efficace :

    $$\text{séries formelles} \rightsquigarrow \text{nombres flottants en précision multiple.}$$

  - Représentable en espace raisonnable :

    $$\text{prolongement analytique} \rightsquigarrow \text{germe en un point suffit.}$$

  - Analyse automatique des singularités :

    $$\text{maîtrise des singularités} \rightsquigarrow \text{contrôle numérique.}$$

- **Exemple fondamental**

  - **Entrée**

$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f})$: système d'équations différentielles algébriques sur $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$

$\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{c} \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]^n$: conditions initiales non singulières dans $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]^n$

$z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$: point où $\boldsymbol{f}(z) \in \mathbb{C}^n$ converge

$\varepsilon \in \mathbb{Q}^{>}$: tolérance

- **Sortie**

  $\tilde{\boldsymbol{f}}(z) \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]^d$ avec $\|\tilde{\boldsymbol{f}}(z) - \boldsymbol{f}(z)\| < \varepsilon$

- **Nombres calculables**

$$r \in \mathbb{R}^{\mathrm{com}}$$

$$\varepsilon \in \mathbb{Q}^{>} \longrightarrow \boxed{\check{x}} \longrightarrow \tilde{x} \in \mathbb{Q}$$

$$|\tilde{x} - x| < \varepsilon$$

- **Pièges**

(Turing) Il n'existe pas d'algorithme pour tester si $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{com}}$ est nul.

(Grzegorczyk) Toute fonction calculable $\mathbb{R}^{\mathrm{com}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{com}}$ est continue.

(Denef-Lipschitz) Pour $\boldsymbol{f}$ et z comme dans l'exemple fondamental, il n'y a pas d'algorithme pour tester si $\boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_1\, z + \cdots$ converge.

- **Fonctions analytiques calculables**

Définition 1. *Germe analytique avec méthodes pour calculer*

1. *La série* $f_0 + f_1 z + \cdots \in \mathbb{C}^{\mathrm{com}}[[z]]^{\mathrm{com}}$.
2. *Borne* $\underline{\rho}_f \leqslant \rho_f$ *pour le rayon de convergence de* f.
3. *Borne* $[\![f]\!]_\rho \geqslant \| f \|_r = \sup_{|z|<r} |f(z)|$ *pour tout* $r \in \mathbb{R}^{\mathrm{dig},>}$, $r < \underline{\rho}_f$.
4. *Prolongement analytique* f_{+z} *pour tout* $z \in \mathbb{C}^{\mathrm{com}}$, $|z| < \underline{\rho}_f$.

Définition 2. *Surface de Riemann* $\mathcal{R}_f$ *calculable (d'en bas) et un algorithme d'incarnation* $\zeta \in \mathcal{R}_f^{\mathrm{com}} \mapsto \Lambda_{f,\zeta}$ *dans chaque point.*

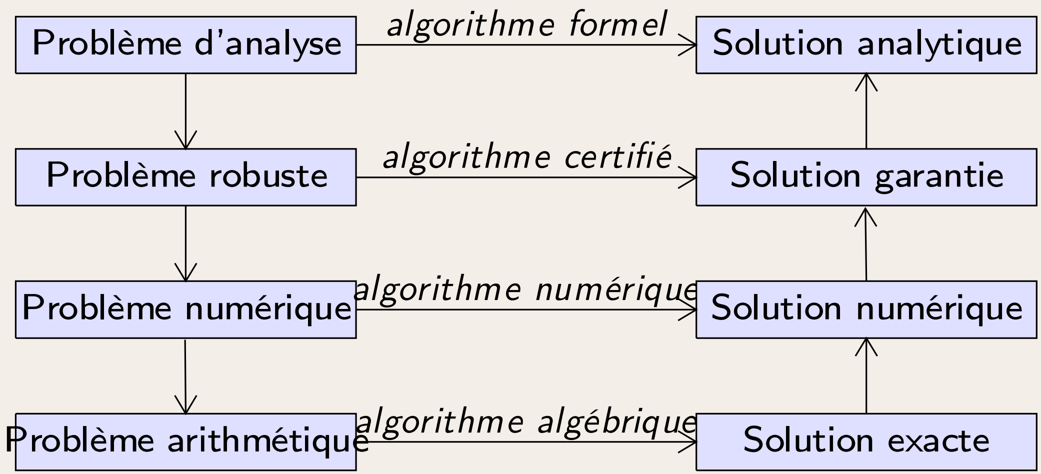
Théorème. *Pour* $\boldsymbol{f}$ *comme dans l'exemple fondamental,* $\boldsymbol{f}$ *est calculable sur sa surface de Riemann.*

- **Tests de nullité**

Théorème. (Denef-Lipschitz, Shackell, Péladan-Germa, vdH, ...) *Soit* $\boldsymbol{f} \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}][[z]]^n$ *comme dans l'exemple fondamental. Alors pour tout* $P \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}][F_1, \ldots, F_n]$*, on peut tester si* $P(f_1, \ldots, f_n) = 0$*.*

Théorème. *Généralisations aux é.d.p.s. et au cas singulier.*

Hiérarchie numérique



Développements rapides en séries

- **Multiplication de polynômes**

  $\mathcal{C}$: anneau effectif

  $\mathsf{M}(n)$: coût pour multiplier deux polynômes de degrés $< n$ dans $\mathcal{C}[z]$

  $\mathsf{M}(n) = O(n \log n \log\log n)$: multiplication FFT

- **Multiplication de séries tronquées**

  Entrée : $a_0 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$ et $b_0 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}$

  Sortie : $(a\,b)_0 + \cdots + (a\,b)_{n-1} z^{n-1}$

- **Multiplication détendue**

  Entrée : flux $a_0, a_1, \ldots$ et $b_0, b_1, \ldots$

  Sortie : flux $(a\,b)_0, (a\,b)_1, \ldots$

  Contrainte : imprimer $(a\,b)_i$ dès que $a_0, \ldots, a_i$ et $b_0, \ldots, b_i$ soient connus

$$b = \mathrm{e}^a = \int (a'\,b).$$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f'\, b)$$

b_n								
b_6								
b_5								
b_4	a_0b_4							
b_3		a_1b_3						
b_2			a_2b_2					
b_1				a_3b_1				
b_0					a_4b_0			
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n

Nombres de Bell

$$b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\,z^n=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z-1}\qquad b=\mathrm{e}^f=\int(f'\,b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3			
2			
1			
0		1	1

b_n								
1								
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f' b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3			
2			
1		1	1
0	1	1	1

b_n

1	1							
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f'\, b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3			
2		1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n

1	1							
1	1	1						
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f'\, b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3		$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n								
1	1							
1	1	1						
1	1	1	$\frac{1}{2}$					
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f' b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4		$\frac{5}{8}$	15
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n

$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$							
1	1	1						
1	1	1	$\frac{1}{2}$					
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f'\, b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5		$\frac{13}{30}$	52
4	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{8}$	15
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n								
$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$							
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$						
1	1	1	$\frac{1}{2}$					
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$			
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Nombres de Bell

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} \qquad b = \mathrm{e}^f = \int (f'\, b)$$

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6		$\frac{203}{720}$	203
5	$\frac{203}{120}$	$\frac{13}{30}$	52
4	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{8}$	15
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n

$\frac{13}{30}$	$\frac{13}{30}$							
$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$						
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$					
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$			
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$		
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3			
2			
1			
0		1	1

b_n								
1								
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3			
2			
1		1	1
0	1	1	1

b_n								
1	1							
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3			
2		1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n								
1	1							
1	1	1						
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4			
3		$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n								
1	1		$\frac{1}{2}$					
1	1	1	$\frac{3}{2}$					
1	1	1	$\frac{1}{2}$					
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5			
4		$\frac{5}{8}$	15
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

b_n

$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$							
1	1		$\frac{1}{2}$					
1	1	1	$\frac{3}{2}$					
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$	$(f')_n$

Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6			
5		$\frac{13}{30}$	52
4	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{8}$	15
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

<table>
<tr><td>b_n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{8}$</td><td>$\frac{5}{8}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{5}{16}$ $\frac{25}{24}$ $\frac{5}{6}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ 1</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{1}{24}$ $\frac{5}{24}$ $\frac{1}{6}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{24}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{24}$</td><td>$\frac{1}{120}$</td><td>$\frac{1}{720}$</td><td>$(f')_n$</td></tr>
</table>

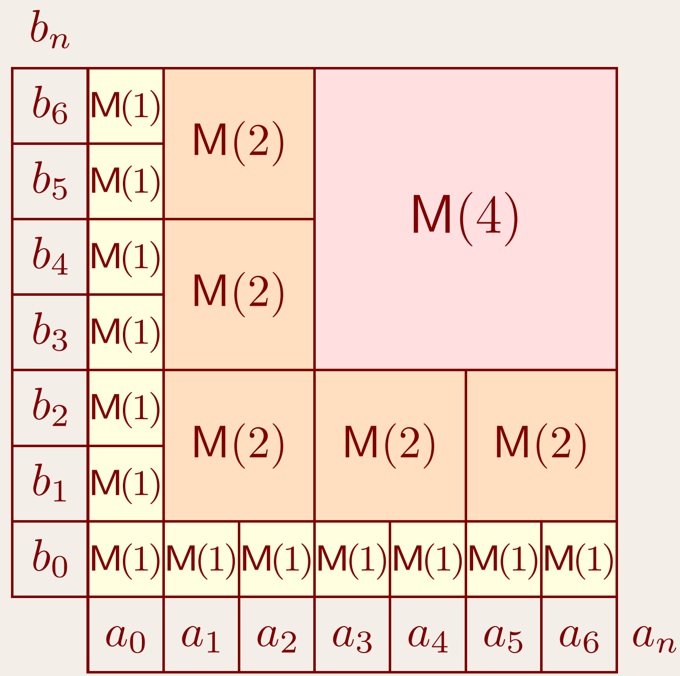
Multiplication détendue rapide

n	$(b')_n$	b_n	B_n
6		$\frac{203}{720}$	203
5	$\frac{203}{120}$	$\frac{13}{30}$	52
4	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{8}$	15
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	5
2	$\frac{5}{2}$	1	2
1	2	1	1
0	1	1	1

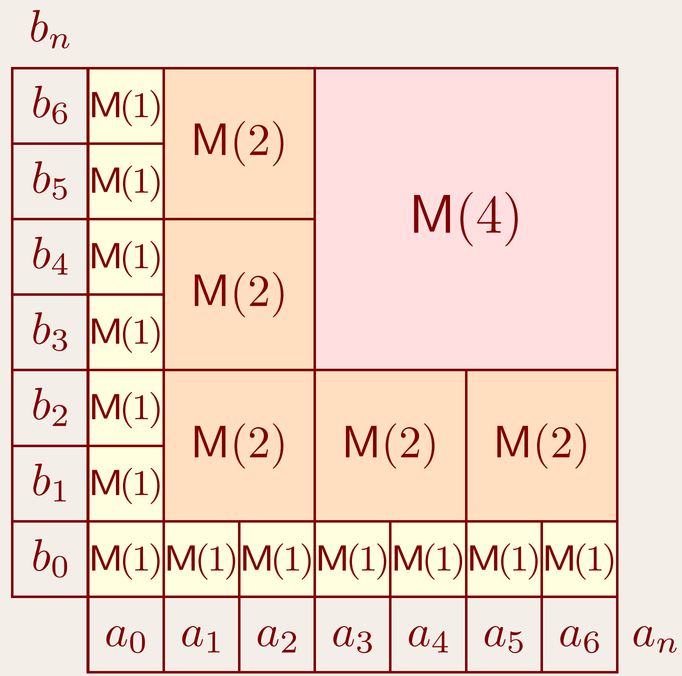
b_n

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{13}{30}$</td><td>$\frac{13}{30}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{8}$</td><td>$\frac{5}{8}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{5}{16}$
$\frac{25}{24}$
$\frac{5}{6}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$
1</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{1}{24}$
$\frac{5}{24}$
$\frac{1}{6}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{24}$</td><td>$\frac{1}{120}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{24}$</td><td>$\frac{1}{120}$</td><td>$\frac{1}{720}$</td><td>$(f')_n$</td></tr>
</table>

Multiplication détendue rapide



Multiplication détendue rapide



$$\mathsf{R}(n) \leqslant 2\left(2\,\mathsf{M}\left(\frac{n}{2}\right) + 4\,\mathsf{M}\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots + n\,\mathsf{M}(1)\right) \leqslant 2\,\mathsf{M}(n)\log_2 n.$$

Nombres de Bell (suite)

- **Calcul exact**

  Mmx ≫ use"numerix"; use"algebramix"; use"analyziz";

  Mmx ≫ $B1$: Series(Rational) == exp(exp(series(0, 1)) − 1)

  Mmx ≫ 250!
  $B1[250]$

  Mmx ≫

⇑ **Précision double**

Mmx ≫ bit_precision := 64; time_mode();

Mmx ≫ $B2$: Series(Floating) == exp(exp(series(0.0, 1.0)) − 1.0);

Mmx ≫ $B2[10000]$

Mmx ≫

⇑ **Précision sextuple**

Mmx ≫ bit_precision := 192;

Mmx ≫ $B3$: Series(Floating) == exp(exp(series(0.0, 1.0)) − 1.0);

Mmx ≫ $B3[10000]$

Mmx ≫

Fonctions holonomes

- **Définition(s) de fonction holonome sur $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\mathbf{i}]$ ou $\mathbb{K} = \hat{\mathbb{Q}}$**

$$L_r\, f^{(r)} + \cdots + L_0\, f = 0 \qquad\qquad L_i \in \mathbb{K}[z]$$

$$\Lambda_s\, f_{n+s} + \cdots + \Lambda_0\, f_n = 0 \qquad\qquad \Lambda_i \in \mathbb{K}[n]$$

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{f} \qquad\qquad \boldsymbol{L}_{i,j} \in \mathbb{K}(z)$$

$$\boldsymbol{f}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}\, \boldsymbol{f}_n \qquad\qquad \boldsymbol{\Lambda}_{i,j} \in \mathbb{K}(n)$$

- **Exemples**

Fonctions élémentaires $\exp$, $\log$, $\sin$, $\cos$

Fonctions spéciales erf, Si, Ci, Ai, polylogarithmes, hypergéométriques, etc.

60% des fonctions spéciales dans Abramowitz & Stegun

Stabilité pour $+$, $\times$, $\odot$, ∂, $\int$, Δ, Σ, Borel, Laplace, etc.

- **Constantes holonomes sur $\mathbb{K}$**

$c = \lim_{z \to 1} f(z)$, avec $\rho_f \geqslant 1$, $f_0, \ldots, f_{r-1} \in \mathbb{K}$, $L_r(0) \neq 0$.

- $\mathbb{K}^{\mathrm{hol}}$: $\rho_f > 1$
- $\mathbb{K}^{\mathrm{rhol}}$: f au pire régulier singulier en $z = 1$
- $\mathbb{K}^{\mathrm{shol}}$: cas général

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky[2], Karatsuba, vdH, ...)

$$\mathbf{\Lambda}_7\,\mathbf{\Lambda}_6\,\mathbf{\Lambda}_5\,\mathbf{\Lambda}_4\,\mathbf{\Lambda}_3\,\mathbf{\Lambda}_2\,\mathbf{\Lambda}_1\,\mathbf{\Lambda}_0$$

- **Analyse en complexité**

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7}$$
$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3}\qquad\mathbf{\Lambda}_{4\ldots7}$$
$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1}\quad\mathbf{\Lambda}_{2\ldots3}\quad\mathbf{\Lambda}_{4\ldots5}\quad\mathbf{\Lambda}_{6\ldots7}$$
$$\mathbf{\Lambda}_0\;\mathbf{\Lambda}_1\;\mathbf{\Lambda}_2\;\mathbf{\Lambda}_3\;\mathbf{\Lambda}_4\;\mathbf{\Lambda}_5\;\mathbf{\Lambda}_6\;\mathbf{\Lambda}_7$$

$$\mathsf{M}(n\log n)$$
$$\cdots$$
$$(n/2)\,\mathsf{M}(2\log n)$$
$$n\,\mathsf{M}(\log n)$$

Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky², Karatsuba, vdH, ...)

$$\begin{pmatrix} 1 & \approx e \\ 0 & \frac{1}{7!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Analyse en complexité**

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3} \qquad \mathbf{\Lambda}_{4\ldots7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1} \quad \mathbf{\Lambda}_{2\ldots3} \quad \mathbf{\Lambda}_{4\ldots5} \quad \mathbf{\Lambda}_{6\ldots7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 \; \mathbf{\Lambda}_1 \; \mathbf{\Lambda}_2 \; \mathbf{\Lambda}_3 \; \mathbf{\Lambda}_4 \; \mathbf{\Lambda}_5 \; \mathbf{\Lambda}_6 \; \mathbf{\Lambda}_7$$

$$\mathsf{M}(n \log n)$$

$$\cdots$$

$$(n/2)\,\mathsf{M}(2 \log n)$$

$$n\,\mathsf{M}(\log n)$$

Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky², Karatsuba, vdH, ...)

$$\mathbf{\Lambda}_7\,\mathbf{\Lambda}_6\,\mathbf{\Lambda}_5\,\mathbf{\Lambda}_4\,\mathbf{\Lambda}_3\,\mathbf{\Lambda}_2\,\mathbf{\Lambda}_1\,\mathbf{\Lambda}_0$$

- **Analyse en complexité**

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7} \qquad\qquad \mathsf{M}(n\log n)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3}\quad \mathbf{\Lambda}_{4\ldots7} \qquad\qquad \cdots$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1}\quad \mathbf{\Lambda}_{2\ldots3}\quad \mathbf{\Lambda}_{4\ldots5}\quad \mathbf{\Lambda}_{6\ldots7} \qquad\qquad (n/2)\,\mathsf{M}(2\log n)$$

$$\mathbf{\Lambda}_0\quad \mathbf{\Lambda}_1\quad \mathbf{\Lambda}_2\quad \mathbf{\Lambda}_3\quad \mathbf{\Lambda}_4\quad \mathbf{\Lambda}_5\quad \mathbf{\Lambda}_6\quad \mathbf{\Lambda}_7 \qquad\qquad n\,\mathsf{M}(\log n)$$

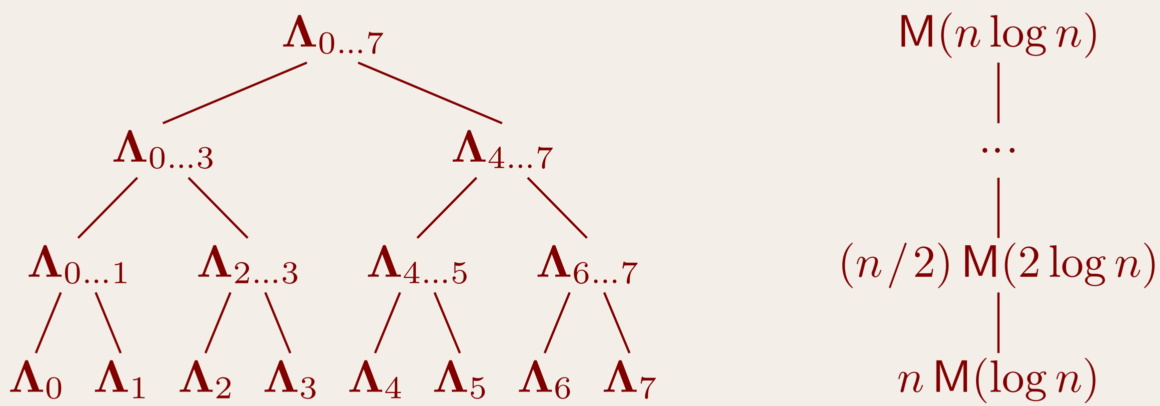
Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky[2], Karatsuba, vdH, ...)

$$(\mathbf{\Lambda}_7\,\mathbf{\Lambda}_6)\,(\mathbf{\Lambda}_5\,\mathbf{\Lambda}_4)\,(\mathbf{\Lambda}_3\,\mathbf{\Lambda}_2)\,(\mathbf{\Lambda}_1\,\mathbf{\Lambda}_0)$$

- **Analyse en complexité**



Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky², Karatsuba, vdH, ...)

$$\mathbf{\Lambda}_{6\ldots7}\,\mathbf{\Lambda}_{4\ldots5}\,\mathbf{\Lambda}_{2\ldots3}\,\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1}$$

- **Analyse en complexité**

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3}\qquad\mathbf{\Lambda}_{4\ldots7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1}\quad\mathbf{\Lambda}_{2\ldots3}\quad\mathbf{\Lambda}_{4\ldots5}\quad\mathbf{\Lambda}_{6\ldots7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0}\;\mathbf{\Lambda}_{1}\;\mathbf{\Lambda}_{2}\;\mathbf{\Lambda}_{3}\;\mathbf{\Lambda}_{4}\;\mathbf{\Lambda}_{5}\;\mathbf{\Lambda}_{6}\;\mathbf{\Lambda}_{7}$$

$$\mathsf{M}(n\log n)$$

$$\cdots$$

$$(n/2)\,\mathsf{M}(2\log n)$$

$$n\,\mathsf{M}(\log n)$$

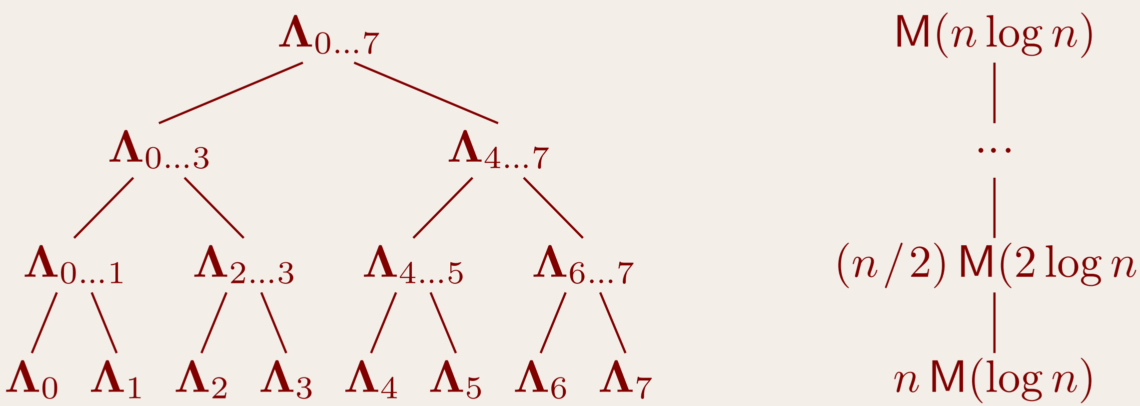
Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky^2, Karatsuba, vdH, ...)

$$(\boldsymbol{\Lambda}_{6\ldots7}\,\boldsymbol{\Lambda}_{4\ldots5})\,(\boldsymbol{\Lambda}_{2\ldots3}\,\boldsymbol{\Lambda}_{0\ldots1})$$

- **Analyse en complexité**



Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky², Karatsuba, vdH, ...)

$$\mathbf{\Lambda}_{4\ldots7}\,\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3}$$

- **Analyse en complexité**

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7} \qquad\qquad \mathsf{M}(n\log n)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3} \quad \mathbf{\Lambda}_{4\ldots7} \qquad\qquad \cdots$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1} \quad \mathbf{\Lambda}_{2\ldots3} \quad \mathbf{\Lambda}_{4\ldots5} \quad \mathbf{\Lambda}_{6\ldots7} \qquad\qquad (n/2)\,\mathsf{M}(2\log n)$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 \quad \mathbf{\Lambda}_1 \quad \mathbf{\Lambda}_2 \quad \mathbf{\Lambda}_3 \quad \mathbf{\Lambda}_4 \quad \mathbf{\Lambda}_5 \quad \mathbf{\Lambda}_6 \quad \mathbf{\Lambda}_7 \qquad\qquad n\,\mathsf{M}(\log n)$$

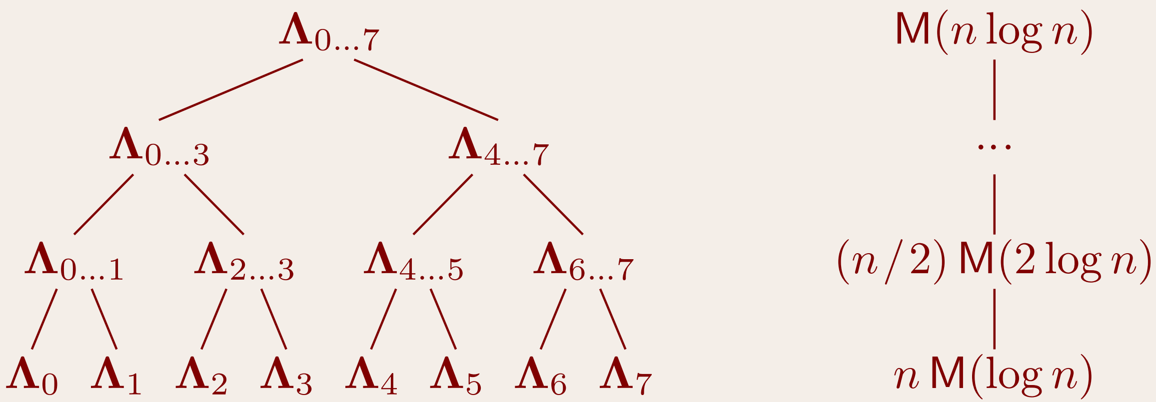
Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky^2, Karatsuba, vdH, ...)

$$(\mathbf{\Lambda}_{4\ldots7}\,\mathbf{\Lambda}_{0\ldots3})$$

- **Analyse en complexité**



Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky^2, Karatsuba, vdH, ...)

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7}$$

- **Analyse en complexité**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \mathbf{\Lambda}_{0\ldots7} & & & & & & & \mathsf{M}(n\log n) \\
 & \mathbf{\Lambda}_{0\ldots3} & & & & \mathbf{\Lambda}_{4\ldots7} & & & & & \cdots \\
\mathbf{\Lambda}_{0\ldots1} & & \mathbf{\Lambda}_{2\ldots3} & & \mathbf{\Lambda}_{4\ldots5} & & \mathbf{\Lambda}_{6\ldots7} & & & & (n/2)\,\mathsf{M}(2\log n) \\
\mathbf{\Lambda}_0 \quad \mathbf{\Lambda}_1 & & \mathbf{\Lambda}_2 \quad \mathbf{\Lambda}_3 & & \mathbf{\Lambda}_4 \quad \mathbf{\Lambda}_5 & & \mathbf{\Lambda}_6 \quad \mathbf{\Lambda}_7 & & & & n\,\mathsf{M}(\log n)
\end{array}$$

Évaluation rapide de fonctions holonomes

- **Diviser pour régner**

  (Brent, Chudnovsky^2, Karatsuba, vdH, ...)

$$\mathbf{\Lambda}_{0\ldots7}$$

- **Analyse en complexité**

Séries de type	$L_{i,j}, z \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$	$L_{i,j} \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, $z \in \mathbb{C}^{\mathrm{com}}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{(n!)^{\kappa}} z^n$	$O(\mathsf{M}(n) \log n)$	$O(\mathsf{M}(n) \log^2 n)$
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$	$O(\mathsf{M}(n) \log^2 n)$	$O(\mathsf{M}(n) \log^2 n \log \log n)$
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n (n!)^{\kappa} z^n$	$O(\mathsf{M}(n) \log^3 n)$	$O(\mathsf{M}(n) \log^3 n)$

Factorisation dans $\mathbb{K}(z)[\partial]$

- **Théorème de densité**

  (Schlesinger, Écalle, Ramis, Martinet, vdH)

  Soit $L \in \mathbb{K}(z)[\partial]$ et z_0 non singulier

  Soit $\mathsf{Gal}_{L,z_0} \subseteq \mathsf{GL}_r(\mathbb{C})$ le groupe de Galois différentiel en z_0

  On peut calculer $\mathcal{M} \subseteq \mathsf{GL}_r(\mathbb{K}^{\mathrm{shol}})$ fini, avec $\mathsf{Gal}_{L,z_0} = \langle \mathcal{M} \rangle$

- **Lien avec la factorisation**

  a) Si $L = K_1 K_2$, alors Gal_{L,z_0} laisse $\ker K_2$ invariant.

  b) Si $V \subseteq \mathbb{C}^r$ est invariant pour Gal_{L,z_0}, alors $L = K_1 K_2$ avec $V = \ker K_2$.

- **Algorithme**

  1) Précision de calcul $p := 64$

  2) Calculer un espace invariant V non trivial sous l'action de $\mathcal{M}$

  a) Un tel V n'existe surement pas $\Rightarrow$ retourner failed

  b) Espace invariant V candidat $\longrightarrow$ factorisation candidat $L = K_1 K_2$

  3) Si $L \neq K_1 K_2$, faire $p := 2p$ et retourner à l'étape 2

  4) Retourner (K_1, K_2)