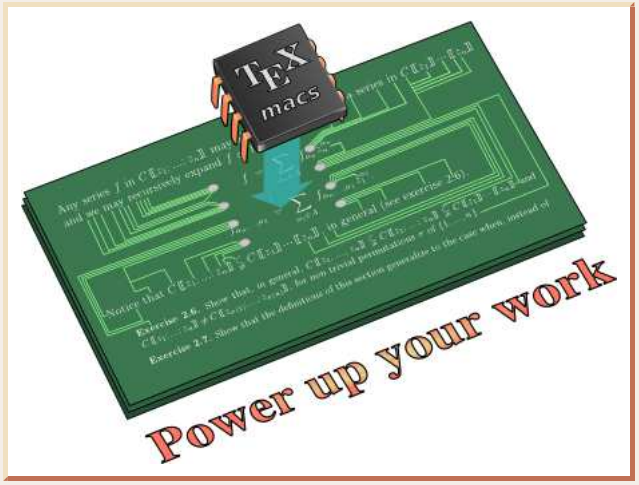
Mathemagix

J. v.d. Hoeven, G. Lecerf, B. Mourrain, O. Ruatta et al. (ANR Gecko)



Luminy 2008

http://www.mathemagix.org

http://www.TEXMACS.org

Version actuelle de Mathemagix

- Installation
  - Téléchargement depuis `http://www.mathemagix.org`.
  - Compilation de la version SVN sur Gforge.
  - Paquetages binaires en construction (Linux, MacOS, MinGW).
- Langage de programmation
  - Interpréteur `mmx-light`.
  - Prototype de compilateur `mmc`, écrit en Mathemagix.
  - Mécanisme de « colle » pour des librairies C/C++.
- Suite de paquetages C++ (anciennement MMXLIB + SYNAPS)
  - Arithmétique rapide de base pour des objets denses.
  - Arithmétique rapide pour des objets approchés.
  - Fonctions analytiques, transséries, calcul symbolique de base.
  - Solveurs.
- Interfaces
  - Textuel (shell, emacs, complétion automatique, coloriage syntaxique).
  - Graphique (GNU TEXMACS).
  - Modeleur 3D (Axel).

Exemple introductif

```
Mmx] use "algebramix"
Mmx] z: Series Rational == series (0, 1);
Mmx] f == exp (exp z - 1)
Mmx] f[500] * 500!
Mmx] M == [ 1/(i+j-1) | i in 1 to 3 || j in 1 to 3 ]
Mmx] invert M
Mmx] fib (n: Integer): Integer ==
       if n <= 1 then 1
       else fib (n-1) + fib (n-2);
Mmx] [ fib n | n in 0..20 ]
Mmx]
```

Fil rouge du langage

programme = { sous (conditions) code }

```
category Ring == {
  convert: Integer -> This;
  prefix -: This -> This;
  infix +: (This, This) -> This;
  infix *: (This, This) -> This;
}
```

```
forall (R: Ring) square (x: R): R == x * x;
```

Typage des ambiguïtés

$x{:}\,T \longleftrightarrow$ assertion dans un langage de premier ordre

$$
\begin{aligned}
x{:}\,T \;\square\; U &\iff x{:}\,T \wedge x{:}\,U \\
x{:}\,T \;\square\; U &\iff x{:}\,T \vee x{:}\,U \\
x{:}\,(\quad{:}\quad)\,T_\lambda &\iff (\forall \lambda{:}\,\Lambda)\, x{:}\,T_\lambda \\
x{:}\,(\quad{:}\quad)\,T_\lambda &\iff (\exists \lambda{:}\,\Lambda)\, x{:}\,T_\lambda \\
x{:}\;\square\; T &\iff C \Rightarrow x{:}\,T \\
\text{Axiome} &\longleftrightarrow \text{Règle de conversion implicite}
\end{aligned}
$$

Conversion implicite : `convert`, `upgrade` et `downgrade`

$$T_1 \xrightarrow{\text{down}} T_2 \xrightarrow{\text{down}} \cdots \xrightarrow{\text{down}} T_t \xrightarrow{\text{convert}} U_u \xrightarrow{\text{up}} \cdots \xrightarrow{\text{up}} U_2 \xrightarrow{\text{up}} U_1$$

Mécanisme de colle

```
foreign cpp import {
  cpp_flags "`algebramix-config --cppflags`";
  ...

  forall (C: Ring) {
    class Polynomial C == polynomial C;

    polynomial: Tuple C -> Polynomial C == polynomial C;
    deg: Polynomial C -> Int == deg;
    postfix []: (Polynomial C, Int) -> C == postfix [];

    prefix -: Polynomial C -> Polynomial C == prefix -;
    ...
  }
}
```

```
require "algebramix/glue_vector_rational.mmx";
require "algebramix/glue_polynomial_generic.mmx"; specialize Polynomial Rational;
specialize Polynomial Complex Rational;
```

	$\mathbb{G}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{K}[i]$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_{64}$
Scalaires	x	gmp	gmp	mpfr	x	x	x	gcc
Vecteurs	x	x	x	x	x	x	x	x
Matrices	x	.	.	.	.	.	.	.
Polynômes	x	x	x	.	.	x	x	x
Séries	x	x	x	.	.	x	x	x

1 Multiplication de matrices dans $\mathbf{Mat(\mathbb{Q}[i])}$

- Réduction $\mathrm{Mat}(\mathbb{Q}[i]) \to \mathrm{Mat}(\mathbb{Q})$.
- Réduction $\mathrm{Mat}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Mat}(\mathbb{Z})$.
- Réduction $\mathrm{Mat}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})$.
- Réduction $\mathrm{Mat}(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Mat}(\mathbb{F}_{64})$.
- Strassen, multithread, block, inline, SIMD.

Exemple

```
Mmx] use "analyziz"
Mmx] time_mode();
Mmx] z == series (0.0, 1.0);
Mmx] B == exp (exp z - 1);
Mmx] B[10000]
Mmx] bit_precision := 128;
Mmx] z == series (0.0, 1.0);
Mmx] B == exp (exp z - 1);
Mmx] B[10000]
Mmx]
```

Détails d'implantation

```
template<typename C, typename V>
class polynomial {
  ...
};
```

```
struct naive_polynomial_vectorial {
  template<typename C> void
  add (C* dest, const C* src, int len) {
    for (int i=0; i<len; i++) dest[i] += src[i];
  }
};
```

```
template<typename V>
struct naive_polynomial_multiply: public V {
  template<typename C> void
  mul (C* dest, const C* s1, const C* s2, int l1, int l2) {     ...
  }
}
```

Calcul symbolique

- Dérivées supérieures

```
Mmx] time_mode ();
Mmx] use "symbolix";
Mmx] derive (exp (x^2 + x), x^^20)
Mmx] derive (x^x, x^^6)
Mmx]
```

```
(%i3) diff (exp (x^2 + x), x, 20)
(%i2) diff (x^x, x, 6)
(%i3)
```

- Commutativité de ∂_x et ∂_y

```
Mmx] derive (x^y^x^y, x^^2, y^^2) - derive (x^y^x^y, y^^2, x^^2)
Mmx]
```

```
(%i5) diff (x^y^x^y, x, 2, y, 2) - diff (x^y^x^y, y, 2, x, 2)
(%i5)
```

Transséries

- Introduction

```
Mmx] use "multimix";
Mmx] x == infinity ('x);
Mmx] 1 / (x + 1)
Mmx] 1 / (x + log x + 1)
Mmx] 1 / (1 + 1/x + exp (-x))
Mmx]
```

- Intégration

```
Mmx] integrate (exp (x^2), x)
Mmx] integrate (x^x, x)
Mmx]
```

- Produits infinis

```
Mmx] lengthen (product (x, x), 4)
Mmx] lengthen (product (x + log x, x), 4)
Mmx]
```

- Équations fonctionnelles

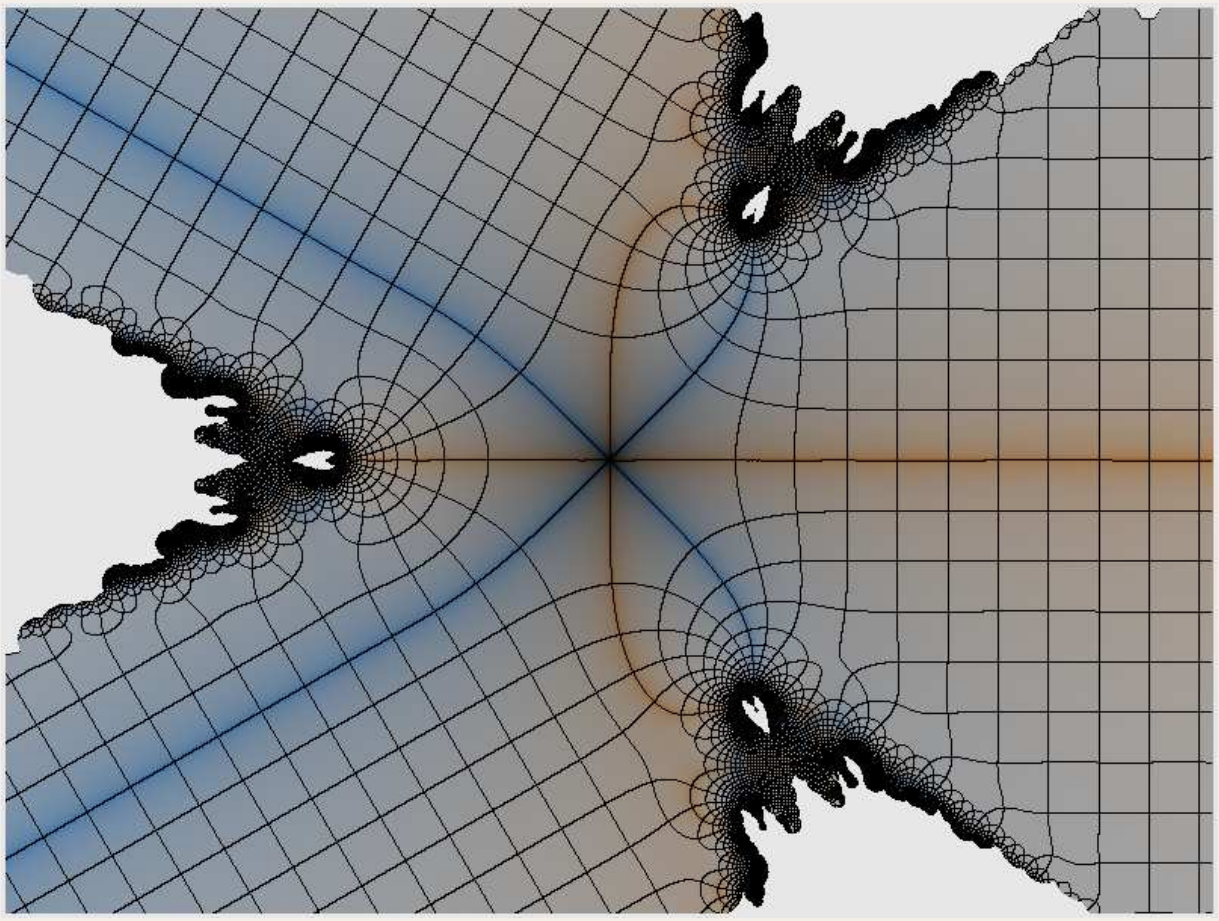
```
Mmx] fixed_point_expander (f :-> 1/x + f @ (x^2))
Mmx] fixed_point_expander (f :-> 1/x + f @ (x^2 + x) + f @ (exp x))
Mmx]
```

Fonctions analytiques

```
Mmx] use "columbus";
```

```
Mmx] z == analytic (0, 1)
```

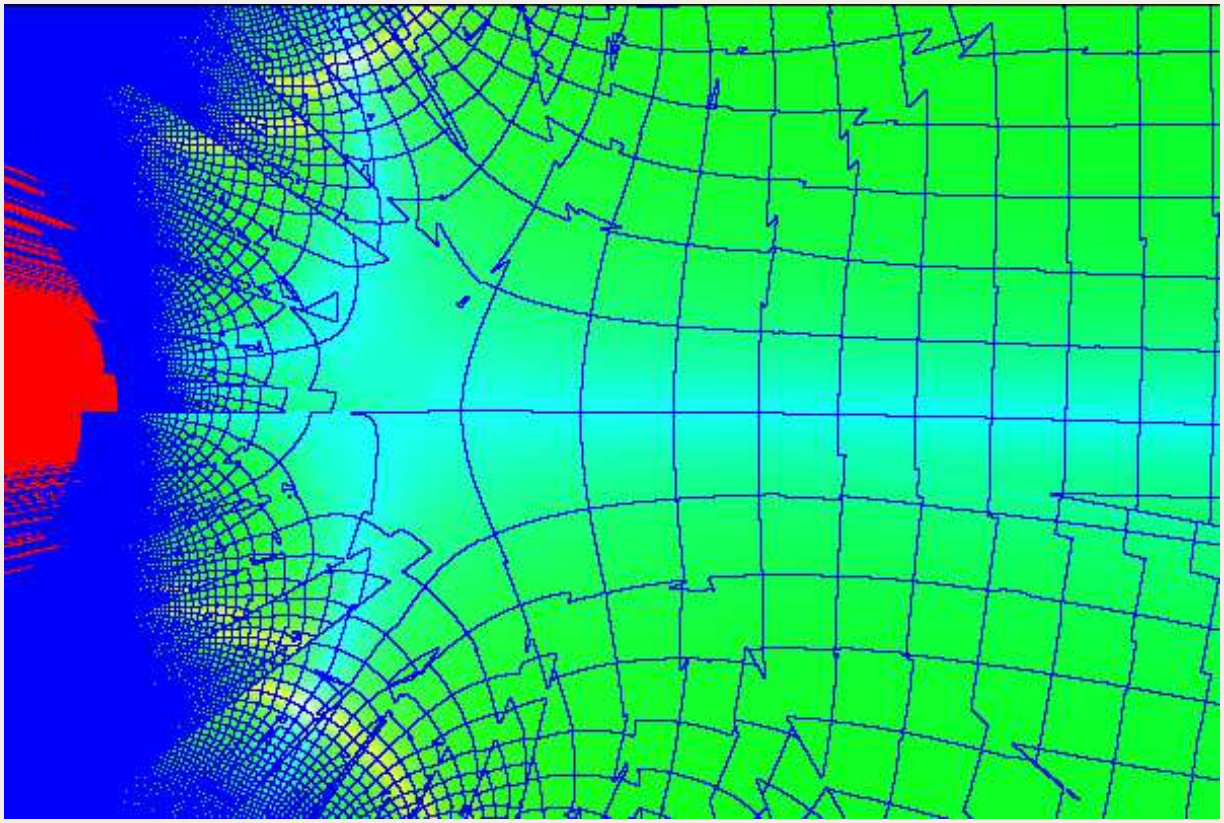
```
Mmx] explore (exp z)
Mmx] explore (complex (14, 3) - 4*z - z*z*z)
Mmx] explore (log (complex (14, 3) - 4*z - z*z*z))
Mmx]
```



Fonctions analytiques

```
Mmx] use "columbus";
```

```
Mmx] z == analytic (0, 1)
Mmx] explore (exp z)
Mmx] explore (complex (14, 3) - 4*z - z*z*z)
Mmx] explore (log (complex (14, 3) - 4*z - z*z*z))
Mmx]
```



Paquetages actuels

basix. Structures de données de base, Generic, syntaxe.

mmx-light. Interpréteur.

mathemagix. Compilateur.

numerix. Interfaces Gmp, Mpfr, corps finis, complexes, boules, etc.

algebramix. Vecteurs, matrices, polynômes et séries univariés.

analyziz. Même chose a coefficients numériques, fonctions analytiques.

symbolix. Calcul symbolique de base.

nla. Interface pour Blas.

subdivix. Bases de Bernstein, solveurs par subdivision.

realroot. Zéros de polynômes réels.

polytopix. Polytopes, volumes mixtes.

shape. Objets géométriques (courbes, surfaces, etc.).

multimix. Séries multivariées, transséries.

holonomix. Fonctions holonomes.

gregorix. Factorisation, Padé-Hermite.