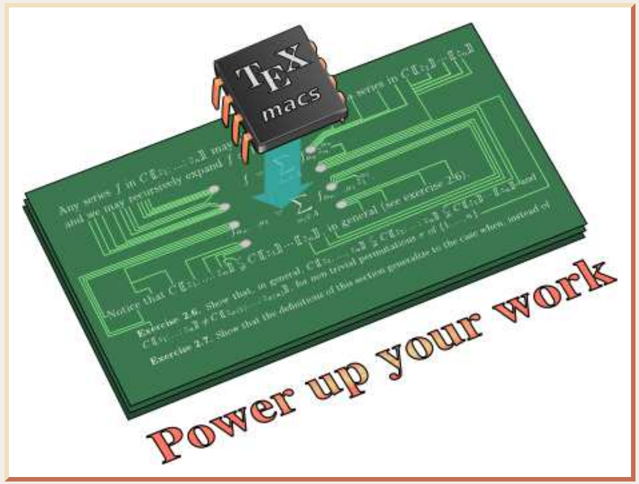
# Calcul rapide et fiable avec les séries formelles




Lyon 2009

http://www.TeXmacs.org

# Examples

- **Intégration d'équations différentielles**

$$\boldsymbol{F}'(z) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{F}(z), z)$$

$\boldsymbol{F}(z)$ convergent en $0$. Calculer $\boldsymbol{F}(\varepsilon)$ avec beaucoup de décimales.

- **Intégration d'équations aux dérivées partielles**

$$\boldsymbol{F}_{z_n}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{F}_{z_1}(\boldsymbol{z}), \ldots, \boldsymbol{z})$$

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ convergent en $\mathbf{0}$. Calculer $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$ avec beaucoup de décimales.

- **Équations de la combinatoire**

$$s(z) = 1 + z\,\frac{s(z)^3 + 2\,s(z^3)}{3}$$

Énumère les alcools de la forme $C_nH_{2n+1}OH$.

# L'approche zélée

## Multiplication de séries formelles

Entrée : $\begin{cases} f = f_0 + \cdots + f_{n-1}\, z^{n-1} \\ g = g_0 + \cdots + g_{n-1}\, z^{n-1} \end{cases}$

Sortie : $h = h_0 + \cdots + h_{n-1}\, z^{n-1} = f\, g + O(z^n)$.

## Algorithmes classiques de multiplication

- Multiplication naïve en $O(n^2)$.
- Diviser pour régner en $O(n^{\log_2 3})$.
- Multiplication F.F.T. en $O(n \log n \log \log n)$.

# Exemple : la multiplication Karatsuba

## Cas $n = 2$

$$
\begin{aligned}
(f_0 + f_1\,z)(g_0 + g_1\,z) \;=\;& f_0\,g_0 + \\
& [(f_0 + f_1)\,(g_0 + g_1) - f_0\,g_0 - f_1\,g_1]\,z + \\
& f_1\,g_1\,z^2
\end{aligned}
$$

| | | |
|---|---|---|
| $g_1$ | | $f_1\,g_1$ |
| $g_0$ | $f_0\,g_0$ | |
| $\times$ | $f_0$ | $f_1$ |

$\square = (f_0 + f_1)\,(g_0 + g_1) - f_0\,g_0 - f_1\,g_1$

# Exemple : la multiplication Karatsuba

**Pour $n$ pair, décomposer :**

$$\begin{cases} f^{\downarrow} & = & f_0 + \cdots + f_{\frac{n}{2}-1}\, z^{\frac{n}{2}-1} \\ f^{\uparrow} & = & f_{\frac{n}{2}} + \cdots + f_{n-1}\, z^{\frac{n}{2}-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} g^{\downarrow} & = & g_0 + \cdots + g_{\frac{n}{2}-1}\, z^{\frac{n}{2}-1} \\ g^{\uparrow} & = & g_{\frac{n}{2}} + \cdots + g_{n-1}\, z^{\frac{n}{2}-1} \end{cases}$$

**Appliquer récursivement :**

$$\begin{aligned} f\,g \;=\; & f^{\downarrow}\, g^{\downarrow} + \\ & [(f^{\downarrow} + f^{\uparrow})\,(g^{\downarrow} + g^{\uparrow}) - f^{\downarrow}\, g^{\downarrow} - f^{\uparrow}\, g^{\uparrow}]\, z^{n/2} + \\ & f^{\uparrow}\, g^{\uparrow}\, z^{n} \end{aligned}$$

# Autres opérations

| Algorithme | Temps | Espace |
|---|---|---|
| Multiplication | $n \log n \log \log n$ | $n$ |
| Division | $M(n)$ | $n$ |
| Équations différentielles | $M(n)$ | $n$ |
| Fonctions holonomes | $n$ | $n$ |
| Composition algébrique | $M(n) \log n$ | $n$ |
| Composition générale | $M(n)\sqrt{n \log n}$ | $n \log n$ |
| Composition char. fini | $M(n) \log n$ | $n$ |
| Inversion $\rightarrow$ compostion | $\uparrow$ | $\uparrow$ |

$M(n)$ : temps pour la multiplication

# Exemple : exponentielle par Newton

## Logarithme

$$\log f = \log f_0 + \int \frac{f'}{f}$$

## Exponentiation

Pour $n$ pair, supposons

$$\log g - f = O(z^{n/2}),$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} f = f_0 + \cdots + f_{n-1}\, z^{n-1}\,; \\ g = g_0 + \cdots + g_{n/2-1}\, z^{n/2-1} \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{g} = g - (\log g - f)\, g$$

$$\Longrightarrow \log \tilde{g} - f = O(z^n).$$

Algorithme d'exponentiation en $O(M(n))$.

# L'approche paresseuse

## Principe

On considère des séries formelles comme des flots de coefficients. Les coefficients sont calculés un par un et à chaque étape on n'effectue que les calculs strictement nécessaires.

## Implantation

Une série formelle $f$ est un algorithme qui ne prend rien en entrée et qui rend son premier coefficient $f_0$ et la série "reste" $(f - f_0)/z$.

## Conséquence importante

On calcule le terme $h_n = (f\,g)_n$ du produit $h = f\,g$ dès que $f_0, \ldots, f_n$ et $g_0, \ldots, g_n$ sont connus. En particulier, $f_{n+1}$ et $g_{n+1}$ peuvent dépendre de $h_0, \ldots, h_n$.

# Exemple de l'exponentiation

## Application

Calcul de l'exponentielle $g = e^f$ d'une série $f$ par

$$g = \int f' g \qquad\qquad (h = f' g)$$

## En effet

$$\begin{aligned} g_n &= \left[\int f' g\right]_n \\ &= \frac{1}{n} (f' g)_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \left[ (f')_0\, g_{n-1} + \cdots + (f')_{n-1}\, g_0 \right] \end{aligned}$$

## Inconvenient

Plus de multiplication rapide.

# L'approche détendue

**Anticipation $\Rightarrow$ Accélération**

# L'approche détendue

**Anticipation $\Rightarrow$ Accélération**

Algorithme naïf

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g_2$ | 2 | | |
| $g_1$ | 1 | 2 | |
| $g_0$ | 0 | 1 | 2 |
| $\times$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ |

0 $\quad h_0 = f_0\, g_0$.

1 $\quad h_1 = f_0\, g_1 + f_1\, g_0$.

2 $\quad h_2 = f_0\, g_2 + f_1\, g_1 + f_2\, g_0$.

Algorithme détendu

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g_2$ | 2 | | |
| $g_1$ | 1 | 1 | |
| $g_0$ | 0 | 1 | 2 |
| $\times$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ |

0 $\quad h_0 = f_0\, g_0$.

1 $\quad h_1 = (f_0 + f_1)\,(g_0 + g_1) - f_0\, g_0 - f_1\, g_1$

2 $\quad h_2 = f_0\, g_2 + f_1\, g_1 + f_2\, g_0$.

# Karatsuba est essentiellement détendu

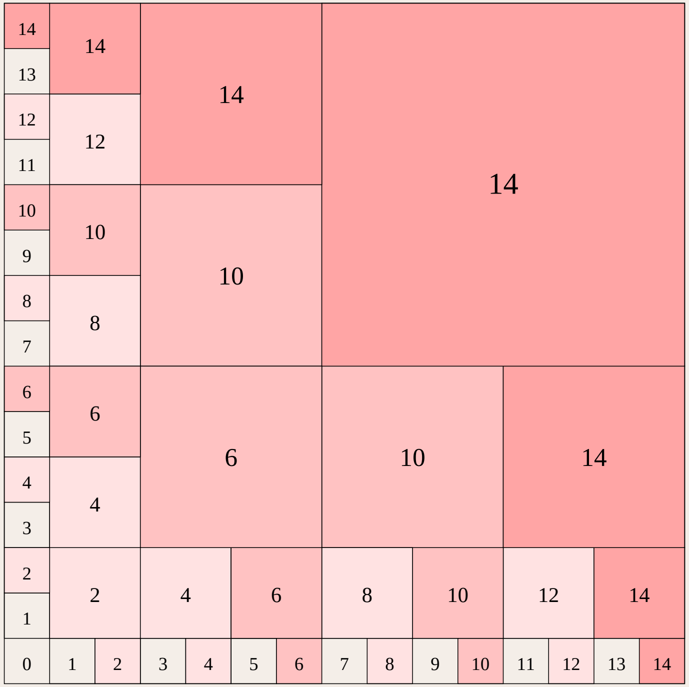
La formule pour $h_k$ ne dépend que de $f_0, \ldots, f_k$ et $g_0, \ldots, g_k$.

## Exemple : multiplication à l'ordre 4

- $h_0 = f_0\, g_0$ ;
- $h_1 = (f_0 + f_1)\,(g_0 + g_1) - f_0\, g_0 - f_1\, g_1$ ;
- $h_2 = (f_0 + f_2)\,(g_0 + g_2) - f_0\, g_0 - f_2\, g_2$ ;
- $h_3 = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3)\,(g_0 + g_1 + g_2 + g_3) - (f_0 + f_1)\,(g_0 + g_1) - (f_2 + f_3)\,(g_2 + g_3) + f_0\, g_0 + f_1\, g_1 + f_2\, g_2 + f_3\, g_3$ ;
- $h_4 = (f_1 + f_3)\,(g_1 + g_3) - f_1\, g_1 - f_3\, g_3$ ;
- $h_5 = (f_2 + f_3)\,(g_2 + g_3) - f_2\, g_3 - f_2\, g_3$ ;
- $h_6 = f_3\, g_3$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $g_3$ | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $g_2$ | 2 | 3 | 2 | 3 |
| $g_1$ | 1 | 1 | 3 | 3 |
| $g_0$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\times$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |

# Multiplication détendue rapide



# Multiplication détendue rapide

Algorithme en temps $O(M(n)\log n)$

# Exemple dans MATHEMAGIX

```
Mmx] use "algebramix";
```

```
Mmx] z == series (0, 1)
```

$$z + O(z^{10})$$

```
Mmx] Bell == exp (exp z - 1)
```

$$1 + z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \frac{5}{8} z^4 + \frac{13}{30} z^5 + \frac{203}{720} z^6 + \frac{877}{5040} z^7 + \frac{23}{224} z^8 + \frac{1007}{17280} z^9 + O(z^{10})$$

```
Mmx] Bell[100] * 100!
```

4758539127676483365879076884138720782636366968682561146661633463755911449789244262267272\
240442177563069535578825607 51

```
Mmx] Bell[1000] * 1000!
```

298990133568240842148042235389764648394739280982123050478327378889454136251232595966411\
658725403915783006391470829869640280218022489933828810134112765748291211558117551708306\
660398388372739719716767823898008103618093192507553993252796567654352559993015297702671\
072816197338002816958815400075778991068786794511654925359304592337133163425515452428158\
023672572848526122010810163863085359901454473418004554723347138640805239789602963657369\
992959320805509285616330258006275249117001495621068958977250477447758122418009373104917\
978181075782339241873128246326290959938323347817130073234836882948253268974503868173274\
105329250746138883212641380838421962022429560013149534494972442718439227419082521076522\
013469338897410704353506902420620015226978552783560120557183928515678133971254191447804\
764791979909216020158737038207691826038367884657850935636860256902698021538024368735308\
770067371545238952730295102387459973562922326312827737487629893860039702144238439470940\
211779897375570203697515615950033729556214118584859598133447999679601962383683370223469\
467717030602692886916940284447912039785334547594105870650225464915188712384215608259071\
358856192217764058987710572705555814492299942157394767587858845457230622639923677500913\
196448615476584722822840058920443715875607118806277411394978188356321207615701749285296\
973972678995544073501612830971232110480492697276552797839007024160951328277664288650176\
533666963041314366902329794538763375997217728970492702305442626112649173933747563841527\
849436079524087826126392203807914452726550044759890642763737136089016506811654674903108\
988049168270694273109611092850355450847913394232664823599556633772015152043408175809154\
684899691816433410071978364814610517989956407892925801469185807037595566340194517315300\
342091892033775226683097711295661081016177274420456370981126788646543099877854633073765\
443395068782672673493481713208349719568066683040991599920673859986908203269024738867827\
81499414773179

Mmx]

# Séries numériques

## Calcul approché des coefficients d'une série

Cf. combinatoire, analyse d'algorithmes, théorie des nombres, etc.

$\longrightarrow$ ordre $O(n)$ et précision $p = O(1)$ ou $\log p = o(\log n)$

$\longrightarrow$ certification du calcul des coefficients

## Évaluation des séries

Cf. intégration de systèmes dynamiques

$\longrightarrow$ ordre $O(n)$ et précision $p = O(n)$

$\longrightarrow$ certification du calcul des restes de Taylor

# Stabilité numérique

- Multiplication rapide numériquement instable :

$$\begin{aligned}(1+2^{-64}\,z)^2 &\not\approx 1+\mathrm{flnear}[(1+2^{-64})^2-1-2^{-128}]\,z+2^{-128}\,z^2\\ &= 1+\mathrm{flnear}[1-1-2^{-128}]\,z+2^{-128}\,z^2\\ &= 1-2^{-128}\,z+2^{-128}\,z^2\end{aligned}$$

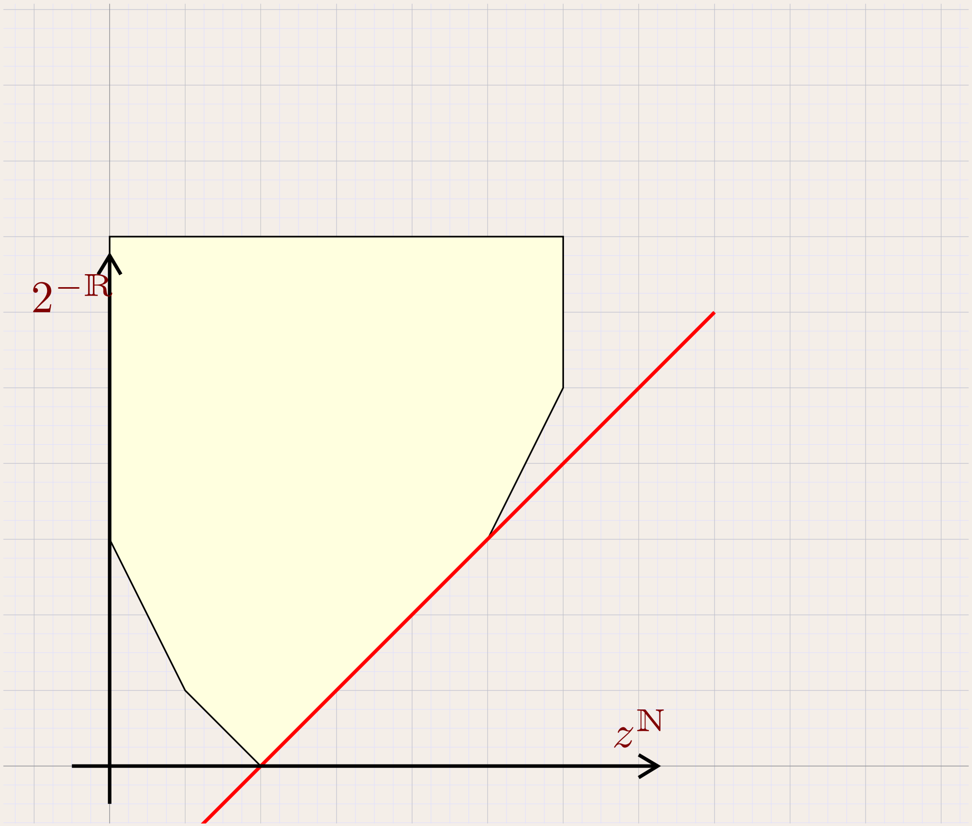
- Stabilisation numérique ou préconditionnement :

$$f(z) \longrightarrow f(\lambda\,z)$$

Exemple :

$$\left(\frac{1}{1-2^{-64}\,z}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$$

# Stabilisation numérique




$$\begin{aligned} f_{0\ldots 6} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\,z + z^2 + \frac{1}{4}\,z^3 + \frac{1}{8}\,z^4 + \frac{1}{8}\,z^5 + \frac{1}{32}\,z^6 \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

# Exemple

```
Mmx] use "analyziz"
Mmx] bit_precision := 64;
Mmx] z == series (0, 1.0);
Mmx] Bell == exp (exp z - 1);
Mmx] Bell[10000]
```

$5.59391085512067220e-7996$

```
Mmx] bit_precision := 128
```

$128$

```
Mmx] Bell == exp (exp z - 1);
Mmx] Bell[10000]
```

$5.5939108551206715907442301743683754 13e-7996$

```
Mmx]
```

# Analyse heuristique de l'erreur

Si

$$
\begin{aligned}
1/\mathrm{radius}(f) &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} \\
f_n &= \alpha^n \varphi_n \\
\log|\varphi_n| &= o(n)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
g_n &= \beta^n \psi_n \\
\log|\psi_n| &= o(n)
\end{aligned}
$$

avec $\beta < \alpha$, alors

$$
\mathrm{loss}_n = O(\log \varphi_n)
$$

# Analyse heuristique de l'erreur

Si

$$\begin{aligned} f_n &= \alpha^n \varphi_n \\ \log|\varphi_n| &= o(n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_n &= \alpha^n \psi_n \\ \log|\psi_n| &= o(n) \end{aligned}$$

avec $\beta < \alpha$, alors

$$\mathrm{loss}_n = O(\log \varphi_n) + O(\log \psi_n)$$

# Analyse heuristique de l'erreur

Si la singularité dominante de $f$ est algébrique,

$$\begin{aligned} f_n &\sim c\,\alpha^n\,n^\gamma \\ \log n^\gamma &= O(\log n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_n &= \beta^n\,\psi_n \\ \log|\psi_n| &= o(n) \end{aligned}$$

avec $\beta < \alpha$, alors

$$\text{loss}_n = O(\log n)$$

# Analyse heuristique de l'erreur

Si la singularité dominante de $f$ est de type

$$\begin{aligned} f &=_{\text{sing}} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} \\ f_n &= a\,\mathrm{e}^{c\sqrt{n}+o(\sqrt{n})} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_n &= \beta^n\,\psi_n \\ \log|\psi_n| &= o(n) \end{aligned}$$

avec $\beta < 1$, alors

$$\mathrm{loss}_n = O(\sqrt{n})$$

# Certification du calcul d'inverses

**Problème :** dans l'arithmétique des boules, calculer

$$\boldsymbol{g} \;=\; \boldsymbol{f}^{-1}$$

**Difficulté :** surestimation des erreurs

$$\begin{aligned}
f &= 1 - z + z^2 \\
f_n &= c_1\,\alpha_1^n + c_2\,\alpha_2^n, \qquad |\alpha_1| = |\alpha_2| = 1 \\
F &= 1 - z - z^2 \\
\mathrm{loss}_n &= C_1\,\mathrm{A}_1^n + C_2\,\mathrm{A}_2^n \qquad |\mathrm{A}_1| = 1.618\cdots
\end{aligned}$$

**Solution :** méthode de Hansen

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= \mathrm{fl}(f^{-1}) \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{f}\,\tilde{g} - \mathbf{1} \\
\boldsymbol{g} &= \tilde{g}\,(1 - \boldsymbol{\varepsilon})^{-1}
\end{aligned}$$

# Illustration

```
Mmx] use "analyziz"
```

```
Mmx] bit_precision := 64;
```

```
Mmx] z == series (0, ball 1.0);
```

```
Mmx] f == 1 / (1 - z + z*z);
```

```
Mmx] [ 10*n, f[10*n] || n in 0 to 10 ]
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.000000000000000 \\ 10.000000000000000 & -1.000000000000000 \\ 20.000000000000000 & 0e-16 \\ 30.000000000000000 & 1.000000000000000 \\ 40.000000000000000 & -1.000000000000000 \\ 50.000000000000000 & 0e-16 \\ 60.000000000000000 & 1.00000000000000 \\ 70.000000000000000 & -1.00000000000000 \\ 80.000000000000000 & 0e-16 \\ 90.000000000000000 & 1.00000000000000 \\ 100.00000000000000 & -1.00000000000000 \end{bmatrix}$$

```
Mmx] Z == series (0, ball 1.0) :> Series Generic;
```

```
Mmx] F == 1 / (1 - Z + Z*Z);
```

```
Mmx] [ 10*n, F[10*n] || n in 0 to 10 ]
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.000000000000000 \\ 10.000000000000000 & -1.00000000000000 \\ 20.000000000000000 & 0e-13 \\ 30.000000000000000 & 1.00000000000 \\ 40.000000000000000 & -1.000000000 \\ 50.000000000000000 & 0e-7 \\ 60.000000000000000 & 1.0000 \\ 70.000000000000000 & -1.00 \\ 80.000000000000000 & 0e0 \\ 90.000000000000000 & 0e2 \\ 100.00000000000000 & 0e4 \end{bmatrix}$$

Mmx]

# Certification du calcul d'exponentielles

**Problème :** dans l'arithmétique des boules, calculer

$$\boldsymbol{g} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{f}}$$

**Difficulté :** il n'y a en a pas !

$$\boldsymbol{g} = \int (\boldsymbol{f}' \boldsymbol{g})$$

**Explication :**

$$\begin{aligned} F_n &= |f_n| \\ G &= \mathrm{e}^F \end{aligned}$$

Alors $g$ et $G$ ont toujours le même rayon de convergence et

souvent le même type de singularité dominante

# Exemple

```
Mmx] use "analyziz"
Mmx] bit_precision := 128;
Mmx] z == series (0, 1.0);
Mmx] (exp (exp z - 1)) [10000]
```

$5.593910855120671590744230174368375413e-7996$

```
Mmx] exp (1 / (1 + z)) [10000]
```

$3.357233457342034862013744851938087688e83$

```
Mmx] z == series (0, ball 1.0);
Mmx] (exp (exp z - 1)) [10000]
```

$5.5939108551206715907442301743684e-7996$

```
Mmx] exp (1 / (1 + z)) [10000]
```

$3.3572334573420348620137448519381e83$

```
Mmx]
```

# Majoration des restes de Taylor

## Notations

$$\begin{aligned} f_{;n} &= f_0 + \cdots + f_{n-1} z^{n-1} \\ f_{n;} &= f_n z^n + f_{n+1} z^{n+1} + \cdots \\ f_{i;j} &= f_i z^i + \cdots + f_{j-1} z^{j-1} \\ \| f \|_\rho &= \sup_{|z| \leqslant \rho} |f(z)| \end{aligned}$$

## Problème

Calcul efficace de bonnes bornes $\llbracket f_{n;} \rrbracket_\rho \geqslant \| f_{n;} \|_\rho$, après quoi

$$\begin{aligned} \llbracket f \rrbracket_\rho &= \| f_{;n} \|_\rho + \llbracket f_{n;} \rrbracket_\rho \\ |f_k| &\leqslant \llbracket f \rrbracket_\rho \, \rho^{-k} \\ |f(z)| &\leqslant \frac{\llbracket f \rrbracket_\rho}{1 - \frac{|z|}{\rho}} \\ |f_{k;}(z)| &\leqslant \frac{\llbracket f \rrbracket_\rho}{1 - \frac{|z|}{\rho}} |z|^k \end{aligned}$$

# Cas explicits

## Réduction

$\rho = 1$ après $f(z) \rightarrow f(\rho z)$ et $\llbracket f \rrbracket_\rho \rightarrow \llbracket f \rrbracket$

## Polynômes

Bonnes bornes $\llbracket f_{;n} \rrbracket$ par FFT de taille $O(n)$ sur $f_0, \ldots, f_{n-1}$, puisque

$$\| f_{;n} \| = \max_{|z|=1} | f_{n;}(z) |.$$

## Opérations de base

$$\begin{aligned}
\llbracket f + g \rrbracket_{n;} &= \llbracket f \rrbracket_{n;} + \llbracket g \rrbracket_{n;} \\
\llbracket \textstyle\int f \rrbracket_{n;} &= \frac{1}{n} \llbracket f \rrbracket_{n-1;} \\
\llbracket f g \rrbracket_{n;} &= |f_0| \llbracket g_{n;} \rrbracket + \cdots + |f_{n-1}| \llbracket g_{1;} \rrbracket + \llbracket f \rrbracket_{n;} \llbracket g \rrbracket
\end{aligned}$$

# Équations implicites

$$f = \int \Phi(f)$$

- Faire l'hypothèse

$$\llbracket f_{n;} \rrbracket \ \leqslant \ B$$

- Calculer, utilisant les règles précédentes,

$$B' \ = \ \llbracket (\int \Phi(f))_{n;} \rrbracket$$

- Vérifier que

$$B' \ \leqslant \ B$$

- Si négatif, augmenter $B$ et recommencer.

  Si positif, diminuer $B$ et recommencer jusqu'à satisfaction.

# Exemple

```
Mmx] use "analyziz";
Mmx] bit_precision := 1024;
Mmx] z == series (0, 1.0);
Mmx] Phi (f) == integrate integrate (-sin f);
Mmx] f == fixed_point_series (Phi, 1.0);
Mmx] f[1000]
```

$-8.151036903037191635308965887924949067320686396286871519560072753928842459835467337381\backslash$
$8417240917218863592869667317020228796560567770075942709458000222334303278038770787369 81\backslash$
$091722811682700640914548511999768553392664879205569776595301843985249714026467796296877\backslash$
$1104206700937905764650061591823934233833640768 4e-444$

```
Mmx]
```