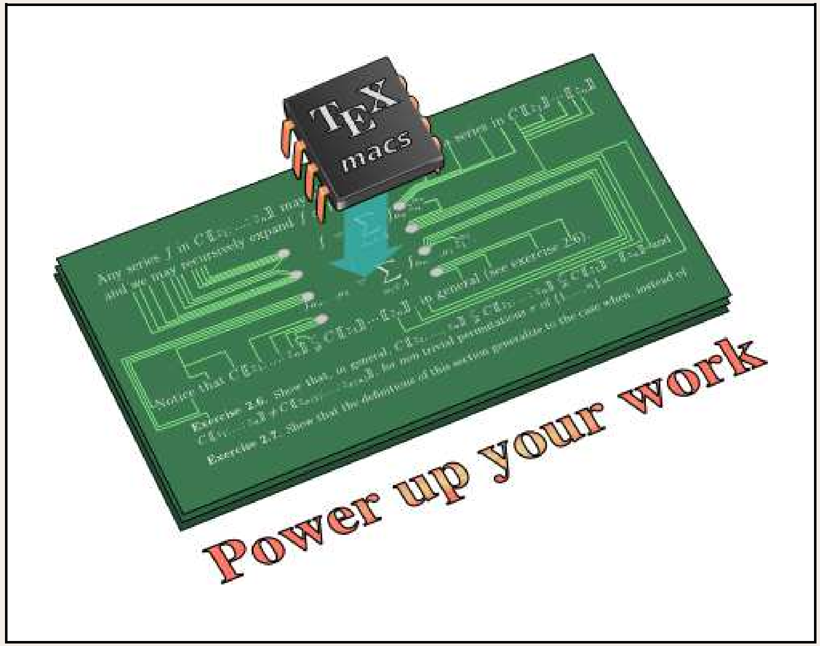
Résolution d'équations différentielles algébriques dans les transséries



Joris van der Hoeven, Strasbourg 2009

http://www.TEXMACS.org

Transséries

- **Exemples**

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots \\
f_2 &= x + \log x + \log\log x + \cdots \\
f_3 &= \mathrm{e}^{x + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots} + \frac{\mathrm{e}^{x + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{x + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots}}{x^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

- **Motivations et histoire**
  - Calcul asymptotique universel pour des fonctions réelles

- L-fonctions de Hardy et corps de Hardy
- Non-oscillation $\longrightarrow$ ordres de croissance

- **Définition**

(Dahn-Göring, Écalle, vdH)

Soit $x \succ 1$ une variable « infiniment grande »

Une **transsérie** $f \in \mathbb{T}$ est une série formelle généralisée

$$f = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{T}} f_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m},$$

avec $f_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{R}$ et où les **transmonômes** $\mathfrak{m} \in \mathfrak{T}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \log_l x = \log \overset{l\times}{\cdots} \log x \qquad \text{ou} \\ \mathfrak{m} &= \exp g, \, g \in \mathbb{T}_{\succ} \end{aligned}$$

avec $\mathbb{T}_{\succ} = \{f \in \mathbb{T} : \operatorname{supp} f \succ 1\}$

- **Opérations**

(Écalle, vdH, van den Dries/Macintyre/Marker)

- $\mathbb{T}$ est un corps
- $\mathbb{T}$ est totalement ordonné par $\leqslant$
- $\mathbb{T}$ est un corps asymptotique (valué) pour $\preccurlyeq$
- $\mathbb{T}$ est stable pour ∂ et $\int$, qui sont compatibles avec $\leqslant$ et $\preccurlyeq$
- $\mathbb{T}$ est stable par $\circ$ et $\circ^{-1}$, qui sont compatibles avec $\leqslant$, $\preccurlyeq$ et ∂
- $\mathbb{T}$ est réel clos
- $\mathbb{T}$ est différentiellement réel clos

Exemples

- **Transséries réticulées**

```
Mmx] use "symbolix"; use "multimix";
Mmx] x == infinity ('x);
Mmx] 1 / (x - 1)
```

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

```
Mmx] exp x / (1 - x^(-1) - exp (-x))
```

$$\mathrm{e}^{x}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{2}}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{3}}+O\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{4}}\right)+1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^{2}}+O\left(\frac{1}{x^{3}}\right)+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{3}{x\,\mathrm{e}^{x}}+O\left(\frac{1}{x^{2}\,\mathrm{e}^{x}}\right)+\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+O\left(\frac{1}{x\,\mathrm{e}^{2x}}\right)$$

```
Mmx] integrate (exp (-x^2), x)
```

$$\frac{-1}{2\,x\,\mathrm{e}^{x^{2}}}+\frac{1}{4\,x^{3}\,\mathrm{e}^{x^{2}}}-\frac{3}{8\,x^{5}\,\mathrm{e}^{x^{2}}}+\frac{15}{16\,x^{7}\,\mathrm{e}^{x^{2}}}+O\left(\frac{1}{x^{9}\,\mathrm{e}^{x^{2}}}\right)$$

```
Mmx] lengthen (product (x, x), 2)
```

$$\mathrm{e}^{x\log(x)-x-\frac{\log(x)}{2}}+\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-x-\frac{\log(x)}{2}}}{12\,x}+\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-x-\frac{\log(x)}{2}}}{288\,x^{2}}+O\left(\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-x-\frac{\log(x)}{2}}}{x^{3}}\right)$$

```
Mmx] integrate (x^x, x)
```

$$\frac{\mathrm{sqrt}(x)\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)}-\frac{\mathrm{sqrt}(x)\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{2}}+\frac{\mathrm{sqrt}(x)\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{3}}-\frac{\mathrm{sqrt}(x)\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{4}}+$$
$$O\left(\frac{\mathrm{sqrt}(x)\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{5}}\right)+\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\mathrm{sqrt}(x)\log(x)^{3}}-\frac{3\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\mathrm{sqrt}(x)\log(x)^{4}}+\frac{6\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\mathrm{sqrt}(x)\log(x)^{5}}+$$
$$O\left(\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\mathrm{sqrt}(x)\log(x)^{6}}\right)+\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{4}\,x^{\frac{3}{2}}}-\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{5}\,x^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{6}\,x^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{2\,\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{5}\,x^{\frac{5}{2}}}+$$
$$O\left(\frac{\mathrm{e}^{x\log(x)-\frac{\log(x)}{2}}}{\log(x)^{6}\,x^{\frac{7}{2}}}\right)$$

```
Mmx] product (log x, x)
```

$$e^{x\log(\log(x))-\frac{x}{\log(x)}-\frac{x}{\log(x)^2}-\frac{2x}{\log(x)^3}+O\left(\frac{x}{\log(x)^4}\right)-\frac{\log(\log(x))}{2}}+\frac{e^{x\log(\log(x))-\frac{x}{\log(x)}-\frac{x}{\log(x)^2}-\frac{2x}{\log(x)^3}+O\left(\frac{x}{\log(x)^4}\right)-\frac{\log(\log(x))}{2}}}{12x\log(x)}+O\left(\frac{e^{x\log(\log(x))-\frac{x}{\log(x)}-\frac{x}{\log(x)^2}-\frac{2x}{\log(x)^3}+O\left(\frac{x}{\log(x)^4}\right)-\frac{\log(\log(x))}{2}}}{x^2\log(x)^2}\right)$$

```
Mmx]
```

- **Transséries à échelle finie**

```
Mmx] fixed_point_expander (f :-> x + f @ (x^(1/5)))
```

$$x+x^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{25}}+x^{\frac{1}{125}}+O\left(x^{\frac{1}{625}}\right)$$

```
Mmx]
```

- **Transséries bien fondées**

```
Mmx] fixed_point_expander (f :-> 1/x + f @ (x^2) + f @ (exp ((log x)^2)))
```

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}+O\left(\frac{1}{x^{16}}\right)+\frac{1}{e^{\log(x)^2}}+\frac{1}{e^{2\log(x)^2}}+\frac{2}{e^{4\log(x)^2}}+O\left(\frac{1}{e^{8\log(x)^2}}\right)+\frac{1}{e^{\log(x)^4}}+\frac{1}{e^{2\log(x)^4}}+O\left(\frac{1}{e^{4\log(x)^4}}\right)+\frac{1}{e^{\log(x)^8}}+O\left(\frac{1}{e^{2\log(x)^8}}\right)$$

```
Mmx] fixed_point_expander (f :-> x + f @ (log x))
```

$x+\log(x)+\log(\log(x))+\log(\log(\log(x)))+O(\log(\log(\log(\log(x)))))$

```
Mmx] fixed_point_expander (f :-> 1/x + f @ (exp x))
```

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}}}+O\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}}}}\right)$$

```
Mmx] fixed_point_expander (f :-> 1/x + f @ (exp x + x))
```

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}-\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}+\frac{x^2}{\mathrm{e}^{3x}}+O\left(\frac{x^3}{\mathrm{e}^{4x}}\right)+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+x}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{x}+x}}-\frac{x}{\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{x}+2x}}+O\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{3\mathrm{e}^{x}+x}}\right)+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+x}+\mathrm{e}^{x}+x}}+O\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+x}+\mathrm{e}^{x}+x}}\right)$$

```
Mmx]
```

- **Transséries imbriquées**

$$f=\mathrm{e}^{\sqrt{x}+f(\log x)}=\mathrm{e}^{\sqrt{x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\log\log x}+\mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$$

- **Transséries de forces supérieures**

$$\begin{aligned}\exp_{\omega}(x+1) &= \mathrm{e}^{\exp_{\omega}(x)}\\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_{\omega}(\exp_{\omega^2}(x))\\ &\vdots\end{aligned}$$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f) = 0$	

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f) = 0$	$P(f) = 0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f) = \operatorname{val} P_{+f}$	

Équations algébriques asymptotiques

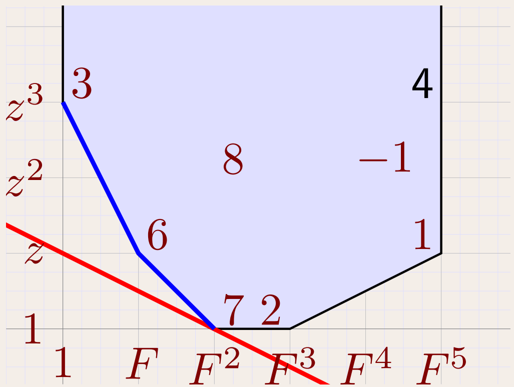
Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f)=\operatorname{val} P_{+f}$	$\mu_{P,\prec \mathfrak{v}}(f)=\operatorname{val}_{\prec \mathfrak{v}} P_{+f}$

Équations algébriques asymptotiques

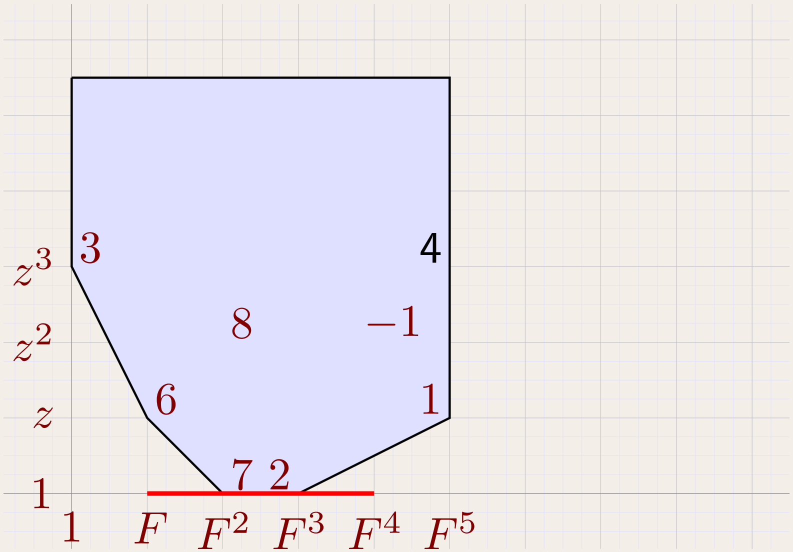
Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f)=\operatorname{val} P_{+f}$	$\mu_{P,\prec \mathfrak{v}}(f)=\deg_{\prec \mathfrak{v}} P_{+f}$

Équations algébriques asymptotiques

Algèbre	Algèbre asymptotique
$P(f)=0$	$P(f)=0, \quad (f \prec \mathfrak{v})$
$\deg P$	$\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$
$\mu_P(f)=\operatorname{val} P_{+f}$	$\mu_{P,\prec \mathfrak{v}}(f)=\deg_{\prec \mathfrak{v}} P_{+f}$



Polynômes de Newton



$$N_P = 2\,F^3 + 7\,F^2$$

$P(f) = 0$ admet une solution $f = c\,\mathfrak{m} + \cdots \Longleftrightarrow N_{P_{\times\mathfrak{m}}}(c) = 0$

Degré de Newton

$$\begin{aligned}
\deg_{\preccurlyeq \mathfrak{v}} P &= \deg N_{P_{\times \mathfrak{v}}}\\
\deg_{\prec \mathfrak{v}} P &= \operatorname{val} N_{P_{\times \mathfrak{v}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\deg_{\prec \mathfrak{w}} P &\leqslant \deg_{\prec \mathfrak{v}} P, && \mathfrak{w} \prec \mathfrak{v}\\
\deg_{\prec \mathfrak{v}} P_{+\varphi} &= \deg_{\prec \mathfrak{v}} P, && \varphi \prec \mathfrak{v}\\
\deg_{\prec \mathfrak{v}} P_{\times \mathfrak{w}} &= \deg_{\prec \mathfrak{v}\mathfrak{w}} P\\
\deg_{\prec \mathfrak{v}} (PQ) &= \deg_{\prec \mathfrak{v}} P + \deg_{\prec \mathfrak{v}} Q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\deg_{\prec \varphi} P_{+\varphi} &= \mu(c_{\varphi}; N_{P_{\times \mathfrak{d}_{\varphi}}})\\
\mu_{\prec \mathfrak{v}}(f; P) &= \deg_{\prec \mathfrak{v}} P_{+f}
\end{aligned}$$

Algorithme de résolution

1. $\deg_{\prec\mathfrak{v}} P = d > 0$

   ($P = A_{+g}$ et g racine de A modulo $\prec\mathfrak{v}$)

2. Si $d = 1$, retourner unique solution

3. Déterminer monôme débuteur $\mathfrak{w} \prec \mathfrak{v}$

4. Résoudre $N_{P_{\times\mathfrak{w}}}(c) = 0$ et affecter $\varphi := c\,\mathfrak{w}$

5. Raffiner $f = \varphi + \tilde{f}$, $\tilde{f} \prec \mathfrak{w} \longrightarrow 0 < \deg_{\prec\mathfrak{w}} \tilde{P} \leqslant d$ avec $\tilde{P} = P_{+\varphi}$

   ($\tilde{P} = A_{+g+\varphi}$ et $g + \varphi$ racine de A modulo $\prec\mathfrak{w}$)

6. Retourner à l'étape 1

Algorithme de résolution

1. $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P = d > 0$

   ($P = A_{+g}$ et g racine de A modulo $\prec \mathfrak{v}$)

2. Si $d = 1$, retourner unique solution

3. Déterminer monôme débuteur $\mathfrak{w} \prec \mathfrak{v}$

4. Résoudre $N_{P_{\times \mathfrak{w}}}(c) = 0$ et affecter $\varphi := c\,\mathfrak{w}$

   $$\left(f - \frac{1}{1 - z} \right)^2 = z^{10000}$$

5. Raffiner $f = \varphi + \tilde{f}, \tilde{f} \prec \mathfrak{w} \longrightarrow 0 < \deg_{\prec \mathfrak{w}} \tilde{P} \leqslant d$ avec $\tilde{P} = P_{+\varphi}$

   ($\tilde{P} = A_{+g+\varphi}$ et $g + \varphi$ racine de A modulo $\prec \mathfrak{w}$)

6. Retourner à l'étape 1

Algorithme de résolution

1. $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P = d > 0$

   ($P = A_{+g}$ et g racine de A modulo $\prec \mathfrak{v}$)

2. Si $d = 1$, retourner unique solution

3. Déterminer monôme débuteur $\mathfrak{w} \prec \mathfrak{v}$

4. Résoudre $N_{P_{\times \mathfrak{w}}}(c) = 0$ et affecter $\varphi := c\,\mathfrak{w}$

   Si $\mu_{N_{P_\times}}(c) = d$, alors $\varphi :=$ solution unique de $\frac{\partial^{d-1} P}{\partial F^{d-1}}(\varphi) = 0, \varphi \prec \mathfrak{v}$

5. Raffiner $f = \varphi + \tilde{f}, \tilde{f} \prec \mathfrak{w} \longrightarrow 0 < \deg_{\prec \mathfrak{w}} \tilde{P} \leqslant d$ avec $\tilde{P} = P_{+\varphi}$

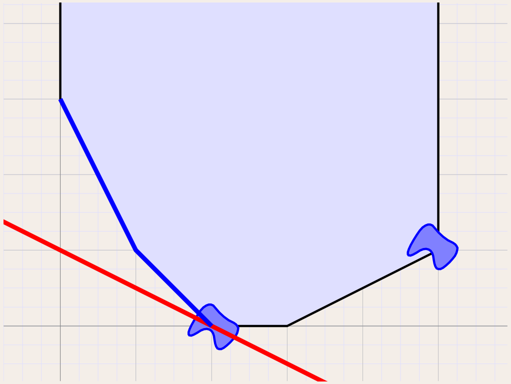
   ($\tilde{P} = A_{+g+\varphi}$ et $g + \varphi$ racine de A modulo $\prec \mathfrak{w}$)

6. Retourner à l'étape 1

Polygones de Newton différentiels

$$P(f) = p(f, f', \ldots, f^{(r)}) = 0, \quad f \prec \mathfrak{v}$$

Pentes ne se lisent pas directement à partir du « polygone de Newton »



$$P = P_0 + \cdots + P_d$$

$$P_2 = (F')^2 - F F'' + \cdots$$

Ascensions

$P\uparrow$ unique polynôme différentiel avec

$$(P\uparrow)(f \circ \mathrm{e}^x) = P(f) \circ \mathrm{e}^x$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
F'\uparrow &= \frac{F'}{\mathrm{e}^x} \\
F''\uparrow &= \frac{F'' - F'}{\mathrm{e}^{2x}} \\
F'''\uparrow &= \frac{F''' - 3\,F'' + 2\,F'}{\mathrm{e}^{3x}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ascensions

$P\!\uparrow$ unique polynôme différentiel avec

$$(P\!\uparrow)(f \circ \mathrm{e}^x) = P(f) \circ \mathrm{e}^x$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
P &= (F')^2 - FF'' \\
P\!\uparrow &= \frac{(F')^2 - FF'' + FF'}{\mathrm{e}^{2x}} \\
P\!\uparrow\uparrow &= \frac{FF'}{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} + \frac{(F')^2 - FF'' + FF'}{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} \\
&\vdots \\
N_P &= FF'
\end{aligned}$$

Ascensions

$P\!\uparrow$ unique polynôme différentiel avec

$$(P\!\uparrow)(f\circ \mathrm{e}^x) = P(f)\circ \mathrm{e}^x$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
P &= (F')^2 - F F'' \\
P\!\uparrow &= \frac{(F')^2 - F F'' + F F'}{\mathrm{e}^{2x}} \\
P\!\uparrow\uparrow &= \frac{F F'}{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} + \frac{(F')^2 - F F'' + F F'}{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}} \\
&\vdots \\
N_P &= F F'
\end{aligned}$$

Conséquence :

$$1 \prec \log \ell \prec \log x \implies P(\ell) \sim \frac{\ell\,\ell'}{x}$$

Polynômes de Newton différentiels

Théorème. *Il existe un unique* $N_P \in \mathbb{R}\{F\}$*, tel que*

$$c_{P\uparrow_l} = N_P$$

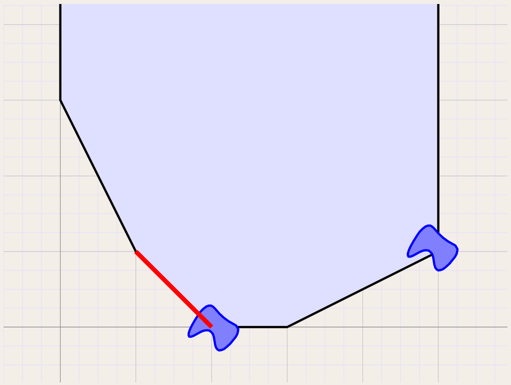
pour tout l *suffisamment grand, et*

$$N_P \in \mathbb{R}[F]\,(F')^{\mathbb{N}}.$$

Définition. $\mathfrak{m} \prec \mathfrak{v}$ *est un monôme débuteur* $\Longleftrightarrow N_{P_{\times\mathfrak{m}}} \notin \mathbb{R}\,F^{\mathbb{N}}$

Monômes débuteurs

Lemme. *Pour $i < j$ avec $P_i \neq 0$, $P_j \neq 0$, il existe un unique (i,j)-égalisateur $\mathfrak{e} \in \mathfrak{T}$ tel que $N_{(P_i+P_j)\times\mathfrak{e}}$ ne soit pas homogène.*



Monômes débuteurs

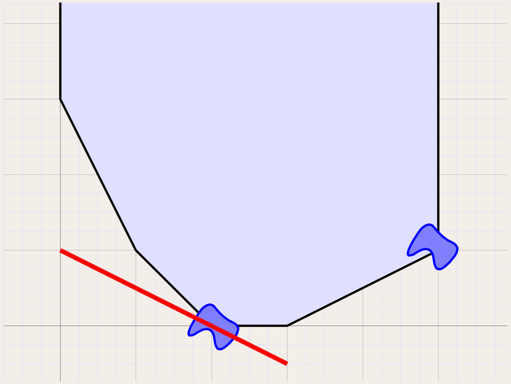
$$\begin{aligned}
P &= \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} F + (F')^2 \\
P_{\times \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}} &= \mathrm{e}^{-2\mathrm{e}^x} (F + (\mathrm{e}^x F - F')^2) \\
P_{\times \mathrm{e}^{2x} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}} &= \mathrm{e}^{4x - 2\mathrm{e}^x} (F + (F - (F' + 2F)\,\mathrm{e}^{-x})^2) \\
N_{P_{\times \mathrm{e}^{2x} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}}} &= F + F^2
\end{aligned}$$

$$f = -\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x + 2x} + \cdots$$

Monômes débuteurs

Lemme. *Pour i avec $P_i \neq 0$, on a*

$$\mathfrak{m} \textit{ est un monôme débuteur pour } P_i(f) = 0$$
$$\Big\Updownarrow$$
$$\mathfrak{m}^\dagger = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}} \textit{ est une solution de } R_{P_i}(g) = 0 \textit{ modulo } \frac{1}{x \log x \log_2 x \cdots}$$



Monômes débuteurs

$$\begin{aligned} P &= (F')^2 - F F'' \\ &= [(F^\dagger)^2 - ((F^\dagger)^2 + (F^\dagger)')]\, F^2 \\ &= -(F^\dagger)'\, F^2 \\ &= R_P(F^\dagger)\, F^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \deg_{\prec 1/(x \log x \cdots)} (F')_{+\lambda} &> 0 \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \\ N_{P_{\times \mathrm{e}^{\int \lambda}}} = N_{P_{\times \mathrm{e}^{\lambda x}}} &\notin \mathbb{R}\, F^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$$f = c\, \mathrm{e}^{\lambda x} + \cdots$$

Suite de la résolution

Lemme. $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P = 1 \Longrightarrow P(f) = 0, f \preccurlyeq \mathfrak{v}$ *admet au moins une solution.*

Avertissement. Problème avec des solutions presque multiples

$$
\begin{aligned}
f^2 - 2\, f' + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{(x \log x \cdots \log_l x)^2} &= 0, \quad (f \prec 1)\\
f^2 - 2\, \mathrm{e}^{-x} f' + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} + \cdots + \frac{1}{(\mathrm{e}^x\, x \cdots \log_{l-1} x)^2} &= 0, \quad (f \prec 1)\\
f^2 - 2\, f' - 2\, f + 1 + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{(x \log x \cdots \log_{l-1} x)^2} &= 0, \quad (f \prec 1)\\
f^2 - 2\, f' + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{(x \log x \cdots \log_{l-1} x)^2} &= 0 \quad (f \prec 1)
\end{aligned}
$$

Lemme. *Le « processus de dénouement » est fini.*

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}}+\cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P\in\mathbb{T}\{F\}$ *et* $f<g\in\mathbb{T}$ *avec* $P(f)\,P(g)<0$. *Alors il existe un* $h\in\mathbb{T}$ *avec* $f<h<g$ *et* $P(h)=0$.

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial-a \quad ou \quad \partial^2-(2\,a+b^{\dagger})\,\partial+(a^2+b^2-a'+a\,b^{\dagger}).$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}} + \cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *et* $f < g \in \mathbb{T}$ *avec* $P(f)\, P(g) < 0$. *Alors il existe un* $h \in \mathbb{T}$ *avec* $f < h < g$ *et* $P(h) = 0$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial - a \quad \textit{ou} \quad \partial^2 - (2\, a + b^\dagger)\, \partial + (a^2 + b^2 - a' + a\, b^\dagger).$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}} + \cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *et* $f < g \in \mathbb{T}$ *avec* $P(f)\,P(g) < 0$. *Alors il existe un* $h \in \mathbb{T}$ *avec* $f < h < g$ *et* $P(h) = 0$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial - a \quad ou \quad \partial^2 - (2\,a + b^\dagger)\,\partial + (a^2 + b^2 - a' + a\,b^\dagger).$$

Résultats

Théorème. *Il existe un algorithme théorique pour trouver toutes les solutions à une équation différentielle asymptotique algébrique.*

Théorème. *Toute solution transsérielle d'une équation différentielle algébrique à coefficients réticulés est à nouveau réticulée.*

Corollaire. $\zeta(x)$ *et* $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^2 x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\log^4 x}} + \cdots$ *sont différentiellement transcendants sur* $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *et* $f < g \in \mathbb{T}$ *avec* $P(f)\, P(g) < 0$. *Alors il existe un* $h \in \mathbb{T}$ *avec* $f < h < g$ *et* $P(h) = 0$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}\{F\}$ *de degré impair admet une racine dans* $\mathbb{T}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *monique se factorise en facteurs de la forme*

$$\partial - a \quad ou \quad \partial^2 - (2\, a + b^{\dagger})\, \partial + (a^2 + b^2 - a' + a\, b^{\dagger}).$$

Généralisations

Construction. $\exists$ *corps* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *de transséries complexes réticulées.*

La construction fait intervenir une infinité de choix comme

$$\begin{aligned} z &\prec\succ 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} &\prec\succ 1 \\ \mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}} &\prec\succ 1 \end{aligned}$$

La construction en tant que « corps fort » est unique.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f \prec \mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\} \setminus \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f\prec\mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\}\setminus\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f\prec\mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec\mathfrak{v}}P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P\in\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\}\setminus\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L\in\mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f \prec \mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec \mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\} \setminus \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Généralisations

Théorème. *Tout équation différentielle asymptotique* $P(f)=0$, $f \prec \mathfrak{v}$ *sur* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet au moins* $\deg_{\prec\mathfrak{v}} P$ *solutions dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $P \in \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}\{F\} \setminus \mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ *admet une racine dans* $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$.

Corollaire. *Tout* $L \in \mathbb{T}[\partial]$ *se factorise en facteurs d'ordre* 1.

Remarque. $\mathbb{T}^{\mathrm{cx}}$ **n**'est **pas** différentiellement clos.

Construction. *Tout corps de transséries admet une clôture imbriquée.*

Construction. $\exists$ *des corps de transséries de forces supérieures.*

Conjecture. *Pour un corps de transséries suffisamment grand, le théorème des valeurs intermédiaires est vraie pour des fonctionnelles faisant intervenir la dérivation et la composition.*

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$*. Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K*, avec* $\gamma \notin K$*, mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$*. Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. H*-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* ***deux*** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de $\mathbb{T}$.*

Théorème. *Soit $\mathcal{T}$ un corps de Hardy transsériel et $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ sa clôture différentiellement algébrique dans $\mathbb{T}$. Alors $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant $\mathcal{T}$.*

Théorème. *$\mathcal{T}$: corps de Hardy transsériel. $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy. $\mathcal{H}$ Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors $\mathcal{H}$ se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec $\leqslant$ appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec $\preccurlyeq$ appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps K admet une lacune $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, alors K admet **deux** clôtures Liouvilliennes avec $\exp \int \gamma \prec \succ 1$.*

Théorème. (ADH) *$\exists$ corps Liouville clos de transséries K, avec $\gamma \notin K$, mais $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. Or $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.*

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* **deux** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec\succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\gamma' + \gamma^2$.

Transséries et théorie des modèles

Définition. *Corps de Hardy transsériel : corps de Hardy & souscorps de* $\mathbb{T}$.

Théorème. *Soit* $\mathcal{T}$ *un corps de Hardy transsériel et* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *sa clôture différentiellement algébrique dans* $\mathbb{T}$. *Alors* $\mathcal{T}^{\mathrm{dalg}}$ *peut être muni d'une structure de corps de Hardy transsériel étendant* $\mathcal{T}$.

Théorème. $\mathcal{T}$ *: corps de Hardy transsériel.* $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{T}$ *: extension différentiellement algébrique de corps de Hardy.* $\mathcal{H}$ *Liouville clos et différentiellement Hensélien. Alors* $\mathcal{H}$ *se modélise comme corps de Hardy transsériel.*

Définition. *H-corps : corps différentiel avec* $\leqslant$ *appropriée.*

Définition. *Corps asymptotique : corps différentiel avec* $\preccurlyeq$ *appropriée.*

Proposition. *Si un H-corps* K *admet une lacune* $\gamma \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \cdots$, *alors* K *admet* **deux** *clôtures Liouvilliennes avec* $\exp \int \gamma \prec\!\succ 1$.

Théorème. (ADH) $\exists$ *corps Liouville clos de transséries* K, *avec* $\gamma \notin K$, *mais* $\varrho \approx \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 \log^2 x} + \cdots \in K$. *Or* $\varrho \approx 2\,\gamma' + \gamma^2$.