Hyperséries et nombres surréels

Joris VAN DER HOEVEN
CNRS, École polytechnique

Travail partiellement en commun avec
M. ASCHENBRENNER, L. VAN DEN DRIES, E. KAPLANSKI, V. BAGAYOKO

Orsay, 27 novembre 2018

Trois sujets intimement liés…

Nombres
(surréels)

Germes
(dans corps de HARDY)

Transséries

(surreels)

Germes

(dans corps de HARDY)

Transsérie

$\mathscr{C}^1$: anneau des germes en $+\infty$ de fonctions continument différentiables $(a,\infty) \to \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$).

Le germe d'une fonction f en $+\infty$ sera également noté par f.

Définition

Un ***corps de Hardy*** *est un sous-anneau de $\mathscr{C}^1$ qui est stable pour l'inversion et pour la dérivation.*

Exemples

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(x)$, $\mathbb{R}(x, \mathrm{e}^x)$, $\mathbb{R}(x, \mathrm{e}^x, \log x)$, $\mathbb{R}(x, \mathrm{e}^{x^2}, \operatorname{erf} x)$

Les corps de HARDY correspondent à la notion vague de fonctions ayant une « **croissance régulière** » à l'infini (BOREL, DU BOIS-REYMOND, ...):

Soient H un corps de HARDY et $f \in H$. Alors

$$f \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f} \in H \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(t) > 0, \text{ ultimement, ou} \\ f(t) < 0, \text{ ultimement.} \end{cases}$$

Par conséquence,

- H est un **corps ordonné** pour :

$$f > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) > 0, \text{ ultimement};$$

- f est **ultimement monotone**, et

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Nombres
(surréels)

Transsériès

Germes
(dans corps de HARDY)

Nombres
(surréels)

Germes
(dans corps de HARDY)

Transséries

Le corps $\mathbb{T}$ des transséries

$\mathbb{T} :=$ clôture de $\mathbb{R} \cup \{x\}$ sous exp, log et la sommation infinie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+\cdots} - 3\,\mathrm{e}^{x^2} + 5\,(\log x)^{\pi} + 42 + x^{-1} + \cdots + \mathrm{e}^{-x}$$

Ici x correspond à une indéterminée infinie et positive.

Le corps $\mathbb{T}$ des transséries

$\mathbb{T} :=$ clôture de $\mathbb{R} \cup \{x\}$ sous $\exp$, $\log$ et la sommation infinie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x/2}+\cdots}-3\,\mathrm{e}^{x^2}+5\,(\log x)^{\pi}+42+x^{-1}+2\,x^{-2}+\cdots+\mathrm{e}^{-x}$$

Ici x correspond à une indéterminée infinie et positive.

Le corps $\mathbb{T}$ des transséries

$\mathbb{T}$:= clôture de $\mathbb{R} \cup \{x\}$ sous exp, log et la sommation infinie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\cdots}-3\,\mathrm{e}^{x^2}+5\,(\log x)^{\pi}+42+x^{-1}+2\,x^{-2}+6\,x^{-3}+\cdots+\mathrm{e}^{-x}$$

Ici x correspond à une indéterminée infinie et positive.

$\mathbb{T} :=$ clôture de $\mathbb{R} \cup \{x\}$ sous exp, log et la sommation infinie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\cdots} - 3\,\mathrm{e}^{x^2} + 5\,(\log x)^{\pi} + 42 + x^{-1} + 2\,x^{-2} + 6\,x^{-3} + 24\,x^{-4} + \cdots + \mathrm{e}^{-x}$$

Ici x correspond à une indéterminée infinie et positive.

$\mathbb{T} :=$ clôture de $\mathbb{R} \cup \{x\}$ sous exp, log et la sommation infinie

$$\sum_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x/2} + \cdots} - 3\,\mathrm{e}^{x^2} + 5\,(\log x)^{\pi} + 42 + x^{-1} + 2\,x^{-2} + 6\,x^{-3} + \cdots + \mathrm{e}^{-x}$$

x: indéterminée infinie positive

$f_{\mathfrak{m}}$: coefficent

$\mathfrak{m}$: transmonôme

$\mathbb{T} :=$ clôture de $\mathbb{R} \cup \{x\}$ sous exp, log et la sommation infinie

$$\sum_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x/2} + \cdots} - 3\,\mathrm{e}^{x^2} + 5\,(\log x)^{\pi} + 42 + x^{-1} + 2\,x^{-2} + 6\,x^{-3} + \cdots + \mathrm{e}^{-x}$$

x: indéterminée infinie positive $\qquad$ $f_{\mathfrak{m}}$: coefficent $\qquad$ $\mathfrak{m}$: transmonôme

La définition formelle de $\mathbb{T}$ procède par induction. La « profondeur » d'une transsérie en exp et log est supposée finie : les « transséries » suivantes **ne** sont **pas** dans $\mathbb{T}$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}}} + \cdots \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \frac{1}{x \log x \log \log x} + \cdots$$

$\mathbb{T}$ comme corps différentiel ordonné

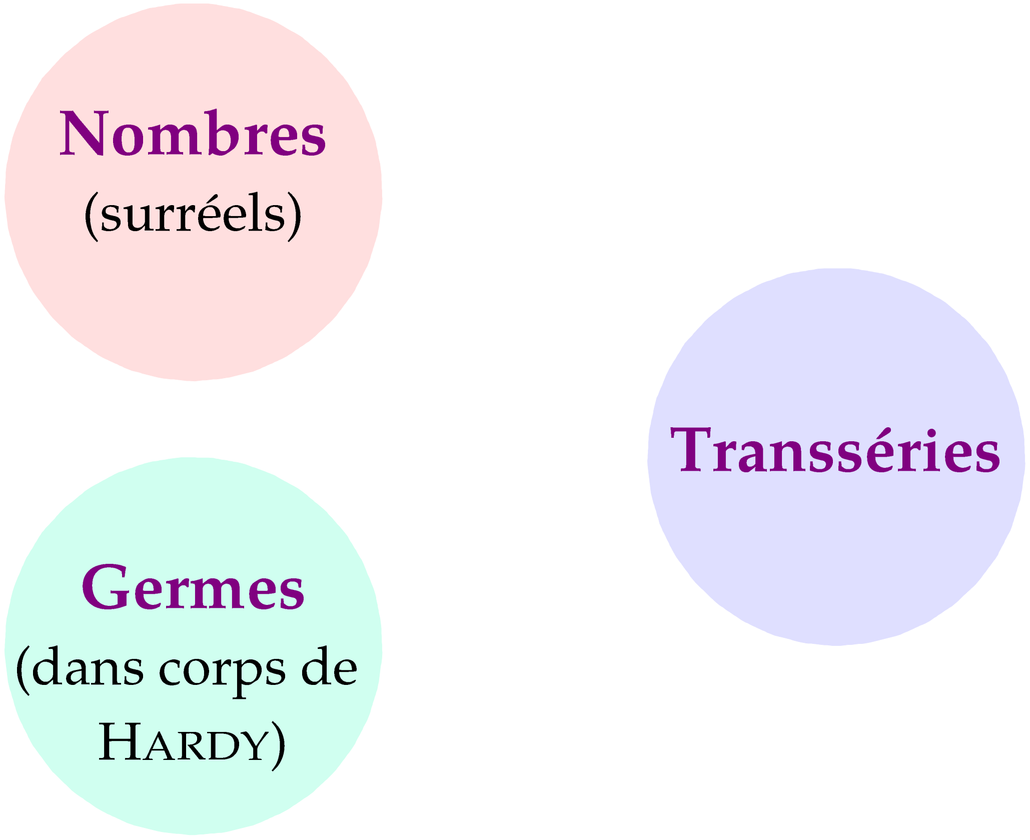
- Pour l'ordre naturel (*via* le coefficient dominant), $\mathbb{T}$ est une extension *réel clos* de $\mathbb{R}$.
- Chaque $f \in \mathbb{T}$ se *dérive* terme par terme (avec $x' = 1$) :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{e^x}{x^n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{e^x}{x^n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{e^x}{x^n} - n \frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = \frac{e^x}{x}$$

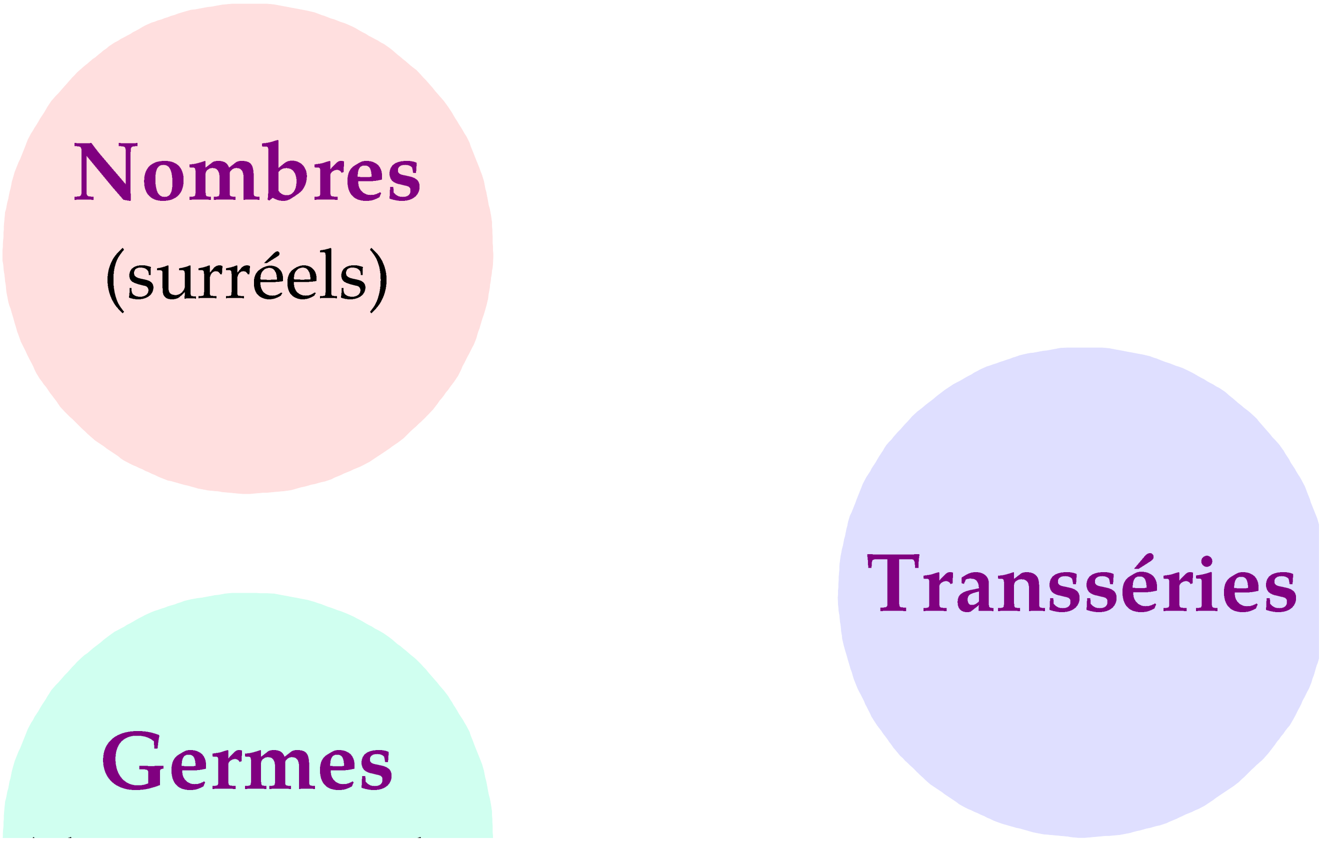
- Cela munit $\mathbb{T}$ d'une *dérivation* $f \mapsto f'$:

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

  Le corps des constantes est $\{f \in \mathbb{T} : f' = 0\} = \mathbb{R}$.
- Pour $f, g \in \mathbb{T}$, l'équation $y' + fy = g$ admet une solution $y \neq 0$ dans $\mathbb{T}$.



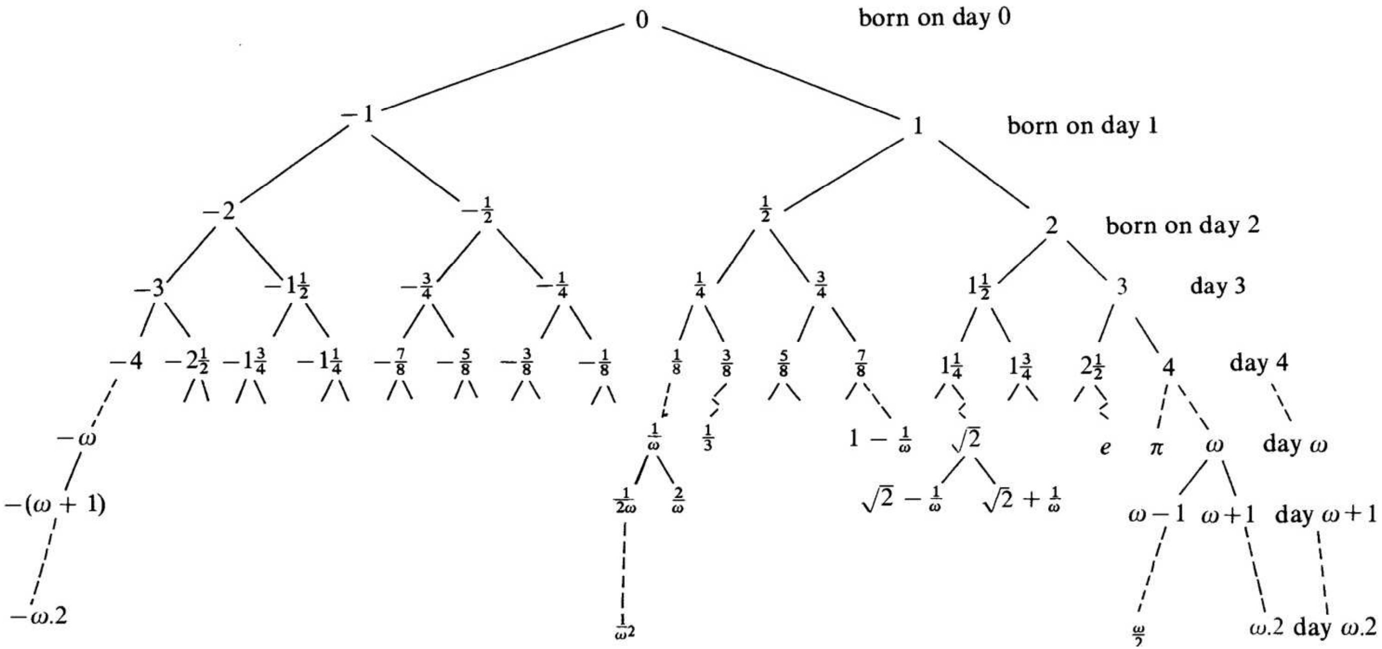
Nombres
(surréels)
Germes
(dans corps de
HARDY)
Transséries


Nombres
(surréels)
Transséries
Germes

Nombres surréels

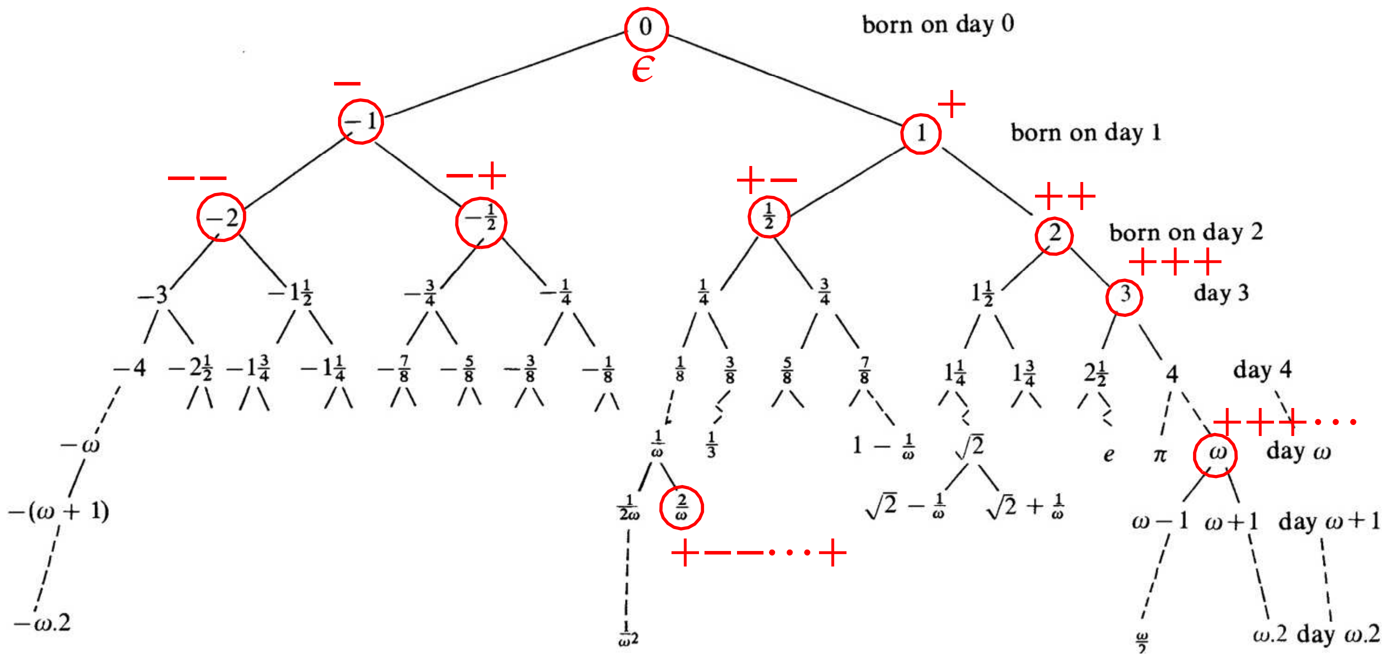
« Chaînes » de signes +, − de longueur ordinale

CONWAY : **No** est une extension réelle close de $\mathbb{R}$



« Chaînes » de signes $+$, $-$ de longueur ordinale

Conway : **No** est une extension réelle close de $\mathbb{R}$



Addition de deux nombres surréels

- $x \in \mathbf{No}$ est **plus simple** que $y \in \mathbf{No}$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ x est un préfixe de y
- $\{L \mid R\}$: élément le plus simple entre sous-**ensembles** $L < R$ de **No**
- Tout $x \in \mathbf{No}$ s'écrit $x = \{L \mid R\}$ pour certains sous-ensembles $L < R$ de **No**

Exemple

$0 = \{\,|\,\}, \;\; 1 = \{0\,|\,\}, \;\; 2 = \{0,1\,|\,\}, \;\; \frac{1}{2} = \{0\,|\,1\}, \;\; \omega = \{0,1,\ldots\,|\,\}$

Définition

Si $x = \{x^L \mid x^R\}$ *et* $y = \{y^L \mid y^R\}$*, alors*

$$x + y \;:=\; \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}.$$

(Idée : on vise $x^L + y \;<\; x + y \;<\; x^R + y, \;\ldots$*)*

Exponentiation et différentiation

- Dans les années 80, Gonshor (utilisant des idées de Kruskal) a défini une exponentielle $\exp\colon \mathbf{No} \to \mathbf{No}^{>0}$ qui étend $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

- En 2006, Berarducci et Mantova (utilisant des idées de vdH et Schmeling) ont défini une dérivation ∂_{BM} sur $\mathbf{No}$ avec

  $$\ker \partial_{\mathrm{BM}} = \mathbb{R}, \quad \partial_{\mathrm{BM}}(\omega) = 1, \quad \partial_{\mathrm{BM}}(\exp(f)) = \partial_{\mathrm{BM}}(f) \cdot \exp(f) \text{ pour } f \in \mathbf{No}.$$

  Dans un certain sens technique, c'est la dérivation la plus « simple » qui satisfasse cetaines conditions naturelles.

- Cette dérivation sur $\mathbf{No}$ se comporte comme la dérivation on $\mathbb{T}$, avec $\omega > \mathbb{R}$ dans le rôle de $x > \mathbb{R}$. Par exemple, $\partial_{\mathrm{BM}}(\log \omega) = \frac{1}{\omega}$.

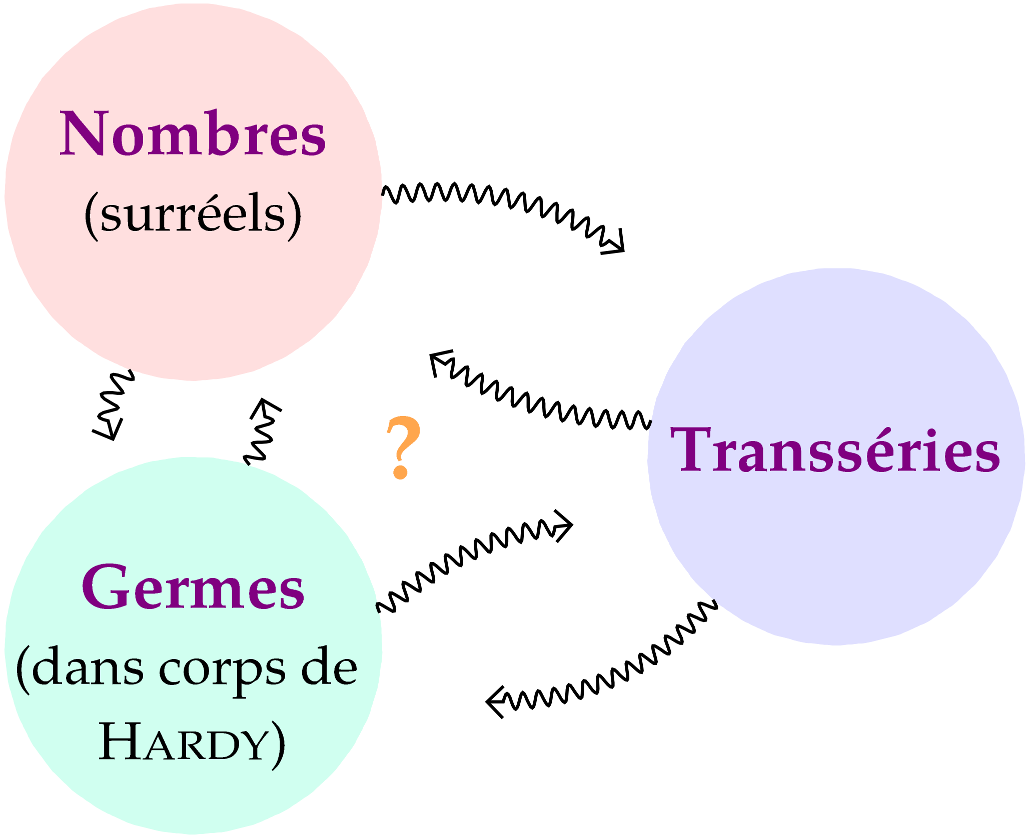
Vers une théorie unifiée

Nombres
(surréels)

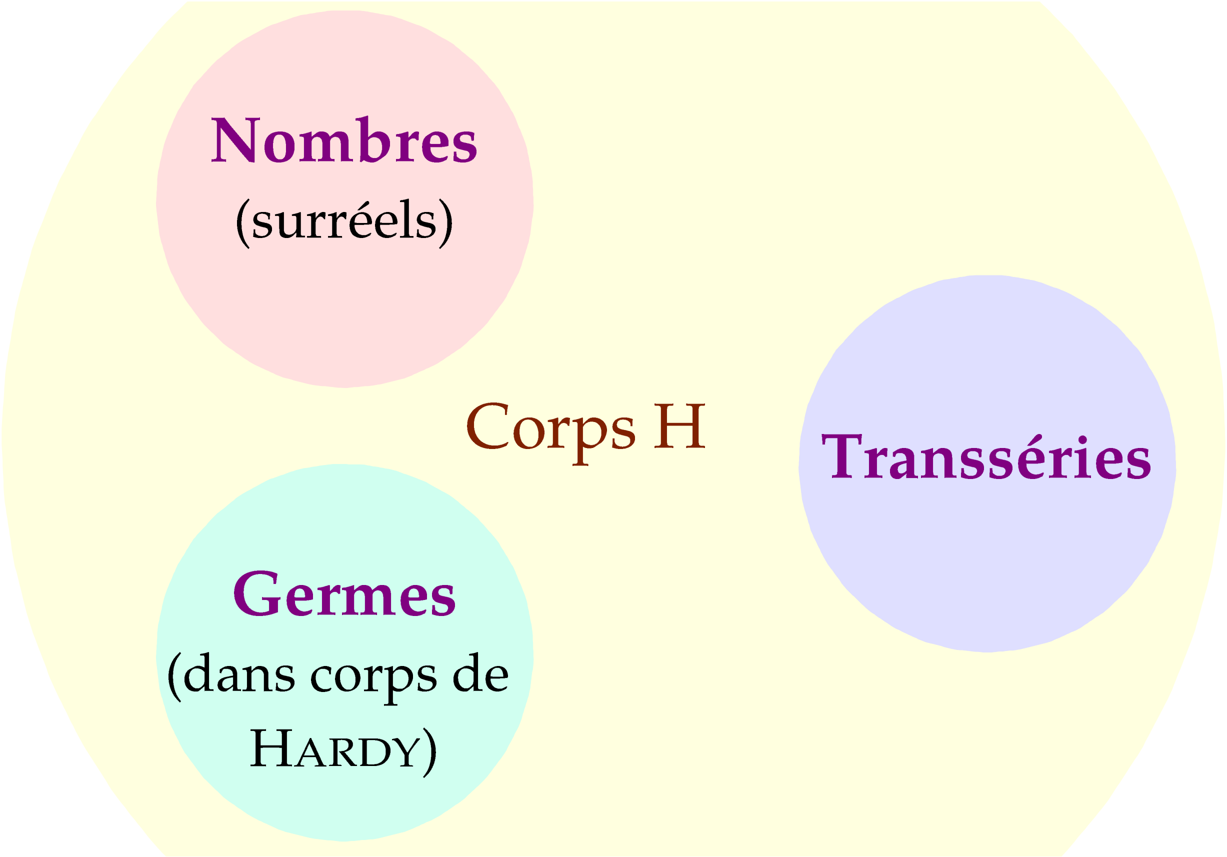
Transséries

Germes
(dans corps de HARDY)

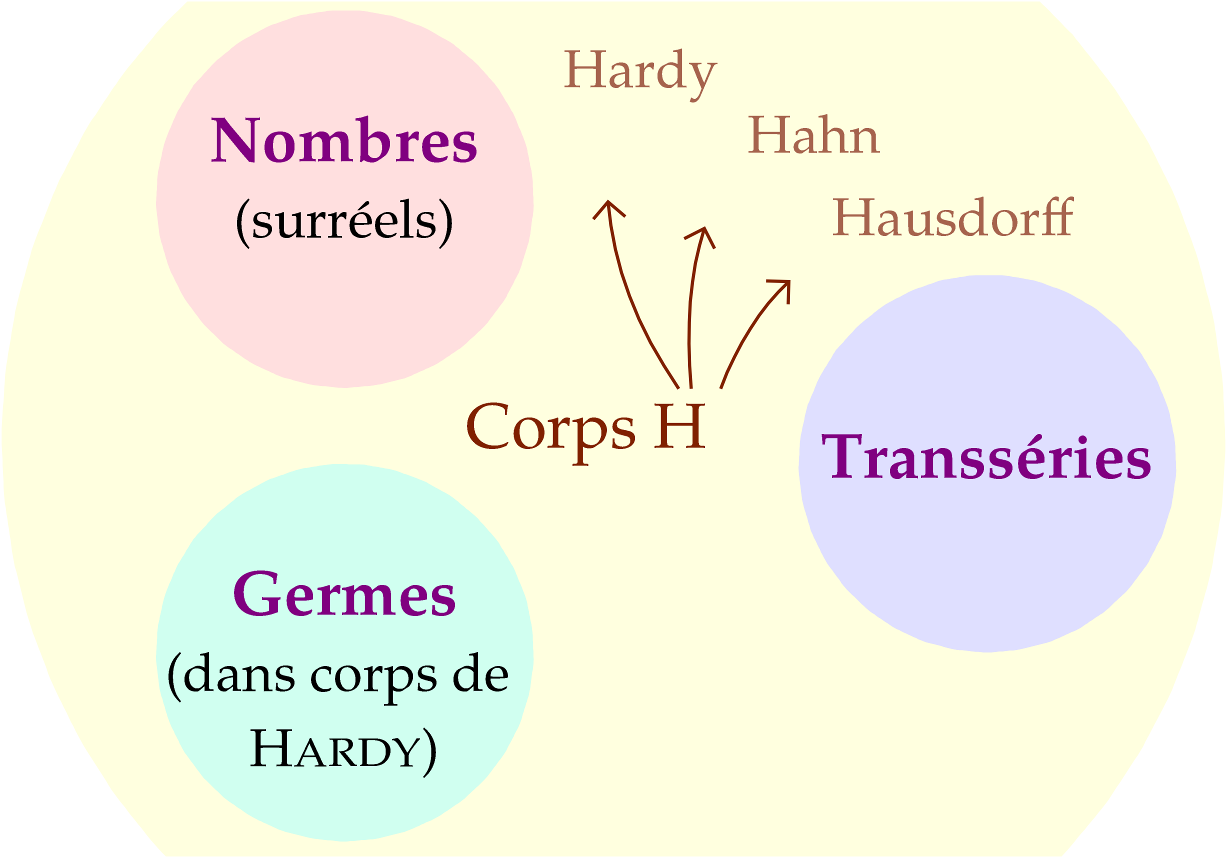
Vers une théorie unifiée



Vers une théorie unifiée



Vers une théorie unifiée



Soit K un corps différentiel ordonné avec corps de constantes

$$C=\{f\in K : f'=0\}.$$

On définit

$$f \preccurlyeq g \;:\Longleftrightarrow\; |f|\leqslant c\,|g| \text{ pour un } c\in C^{>0} \qquad (f \text{ est } \textit{dominée} \text{ par } g)$$

$$f \prec g \;:\Longleftrightarrow\; |f|\leqslant c\,|g| \text{ pout tout } c\in C^{>0} \qquad (f \text{ est } \textit{négligable} \text{ devant } g)$$

$$f \asymp g \;:\Longleftrightarrow\; f\preccurlyeq g\preccurlyeq f \qquad (f \text{ est } \textit{asymptotique} \text{ à } g)$$

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; f-g\prec g \qquad (f \text{ est } \textit{équivalente} \text{ à } g)$$

Exemple

In $\mathbb{T}$: $0 \prec \mathrm{e}^{-x} \prec x^{-10} \prec 1 \asymp 100 \prec \log x \prec x^{1/10} \prec \mathrm{e}^{x} \sim \mathrm{e}^{x}+x \prec \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}$

Corps H

Définition

On dit que K *est un* ***corps H*** *lorsque*

H1. $f > C \implies f' > 0$;

H2. $f \asymp 1 \implies f \sim c$ *pour un certain* $c \in C$.

Examples

Corps de Hardy contenant $\mathbb{R}$;

Sous-corps différentiels ordonnés de $\mathbb{T}$ ou **No** contenant $\mathbb{R}$.

$\mathbb{T}$ admet d'autres propriétés élémentaire (en outre d'être un corps H) :

- la dérivation est **petite**, c.à.d., $f \prec 1 \Longrightarrow f' \prec 1$;
- $\mathbb{T}$ est **Liouville clos**, c.à.d., $\mathbb{T}$ est réel clos et pour tous f, g, il existe un $y \neq 0$ avec $y' + fy = g$.

Résultat principal de notre livre

Nous voyons $\mathbb{T}$ comme une structure pour le langage

$$0, \quad 1, \quad +, \quad \times, \quad \partial \text{ (dérivation)}, \quad \leqslant \text{ (ordre)}.$$

Théorème (Asch–vdD–vdH, Ann. of Math. Stud. vol. 195)

La théorie élémentaire de $\mathbb{T}$ est complètement axiomatisée par :

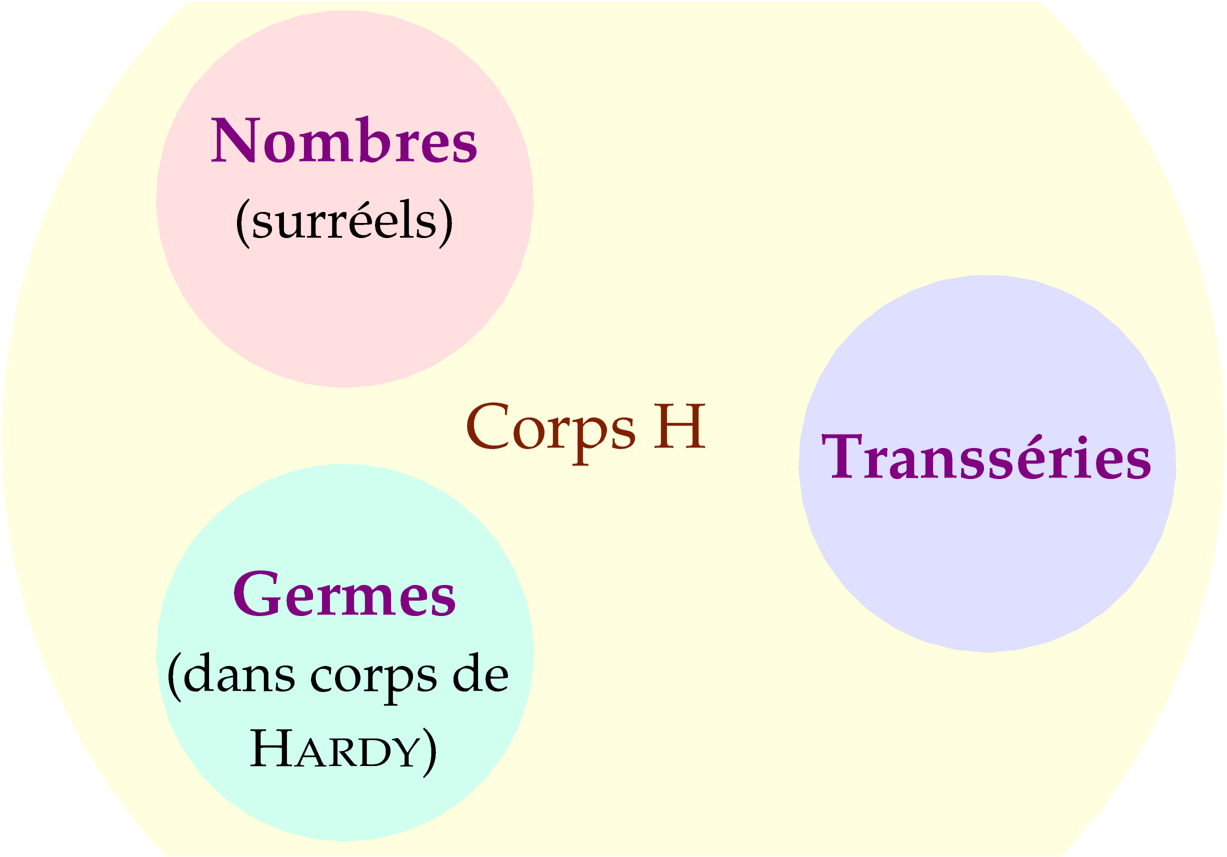
1. *$\mathbb{T}$ est un corps H avec une pétit derivation qui est* LIOUVILLE *clos ;*
2. *$\mathbb{T}$ vérifie la prop. des valeurs intermédiaires pour des polynômes différentiels.*

En fait, 2 a été établi après-coup.

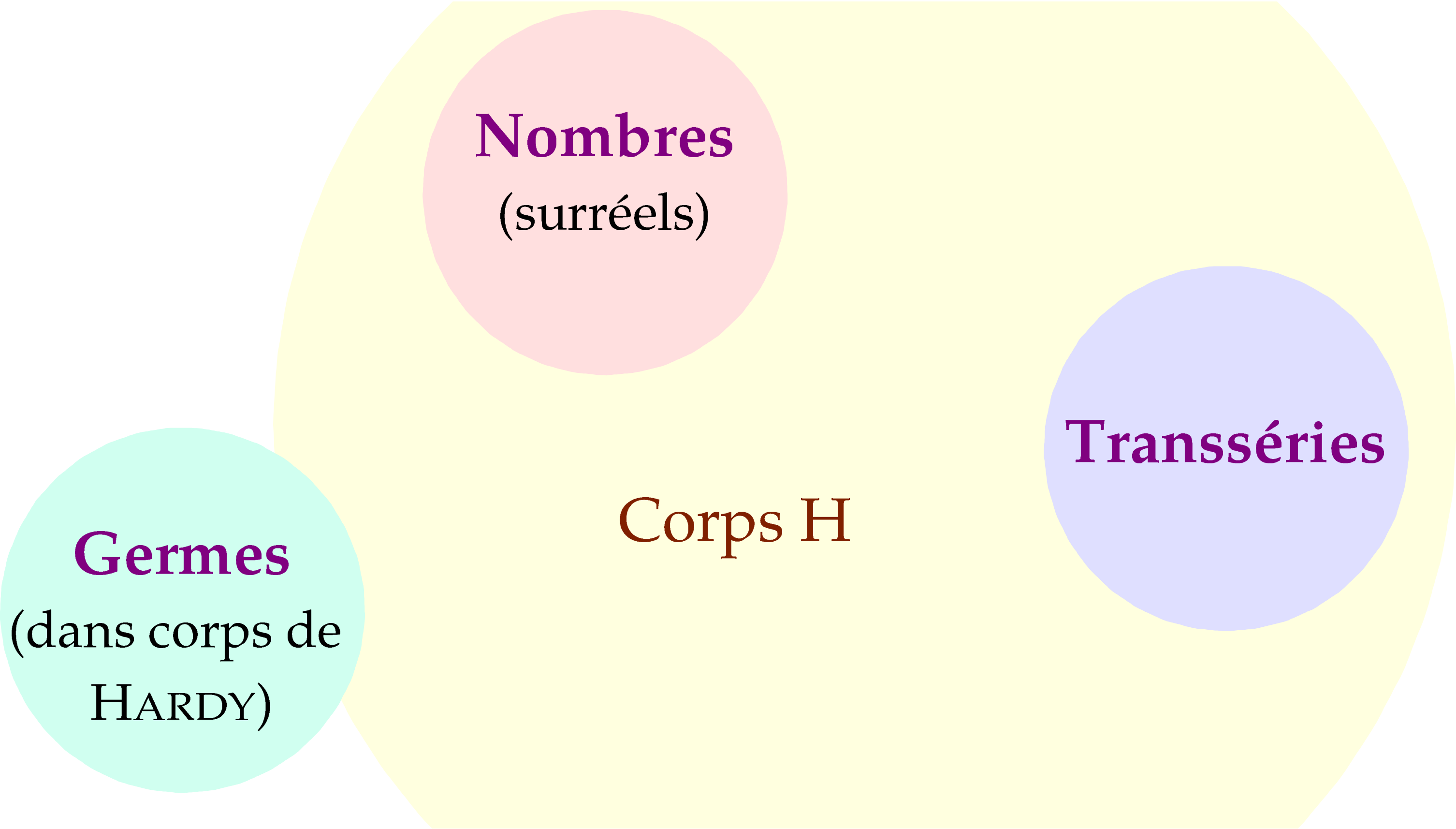
Corollaire : la théorie de $\mathbb{T}$ est décidable.

Aussi : théorème d'élimination de quantificateurs pour une expansion naturelle du langage susmentionné.

Éléments de corps H en tant que germes



Éléments de corps H en tant que germes



Plonger des corps H dans des corps de Hardy

Théorème (Asch–vdD-vdH) en cours...

Soit H un corps de HARDY *maximal. Alors*

- Ⓐ H *vérifie la propriété différentielle des valeurs intermédiaires.*
- Ⓑ *Pour $A, B \subseteq H$ dénombrables avec $A < B$, il existe un $h \in H$ avec $A < h < B$.*

Plonger des corps H dans des corps de Hardy

Théorème (Asch–vdD-vdH) en cours…

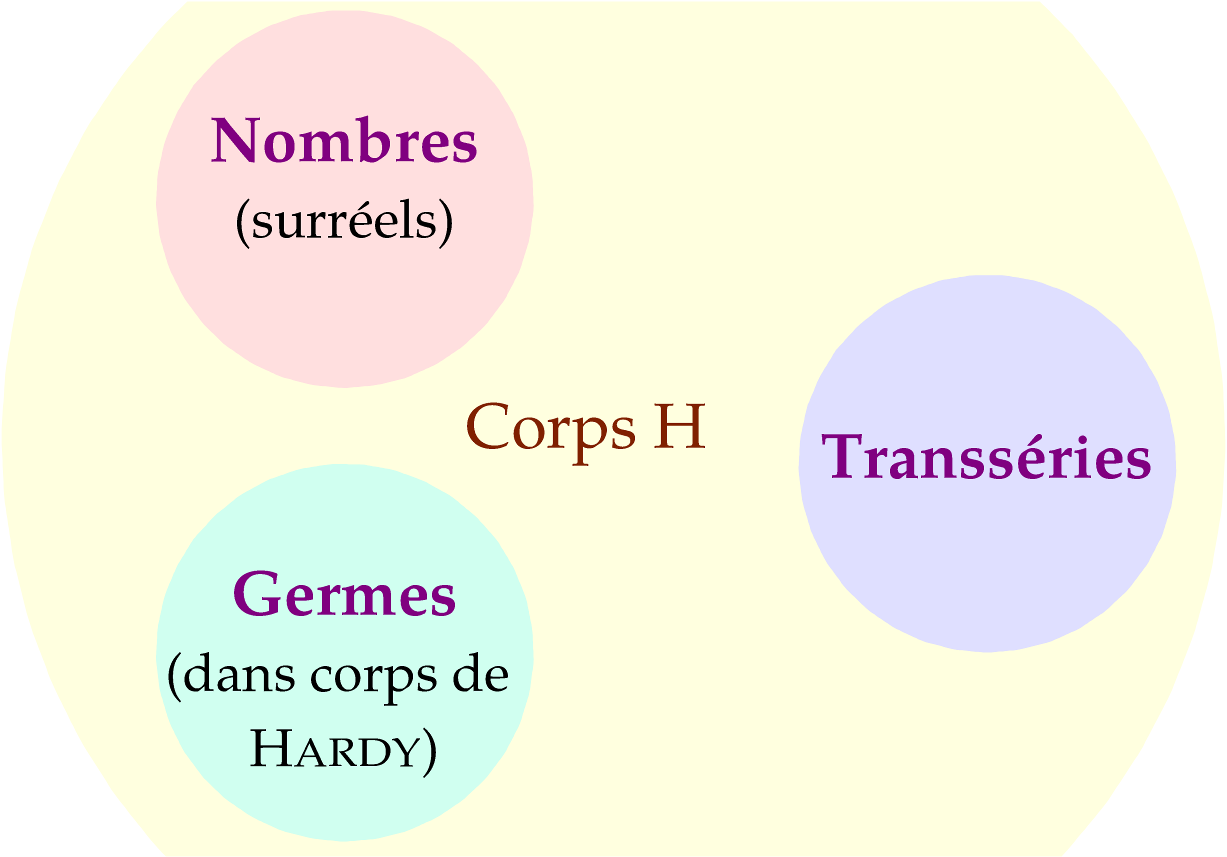
Soit H un corps de HARDY *maximal. Alors*

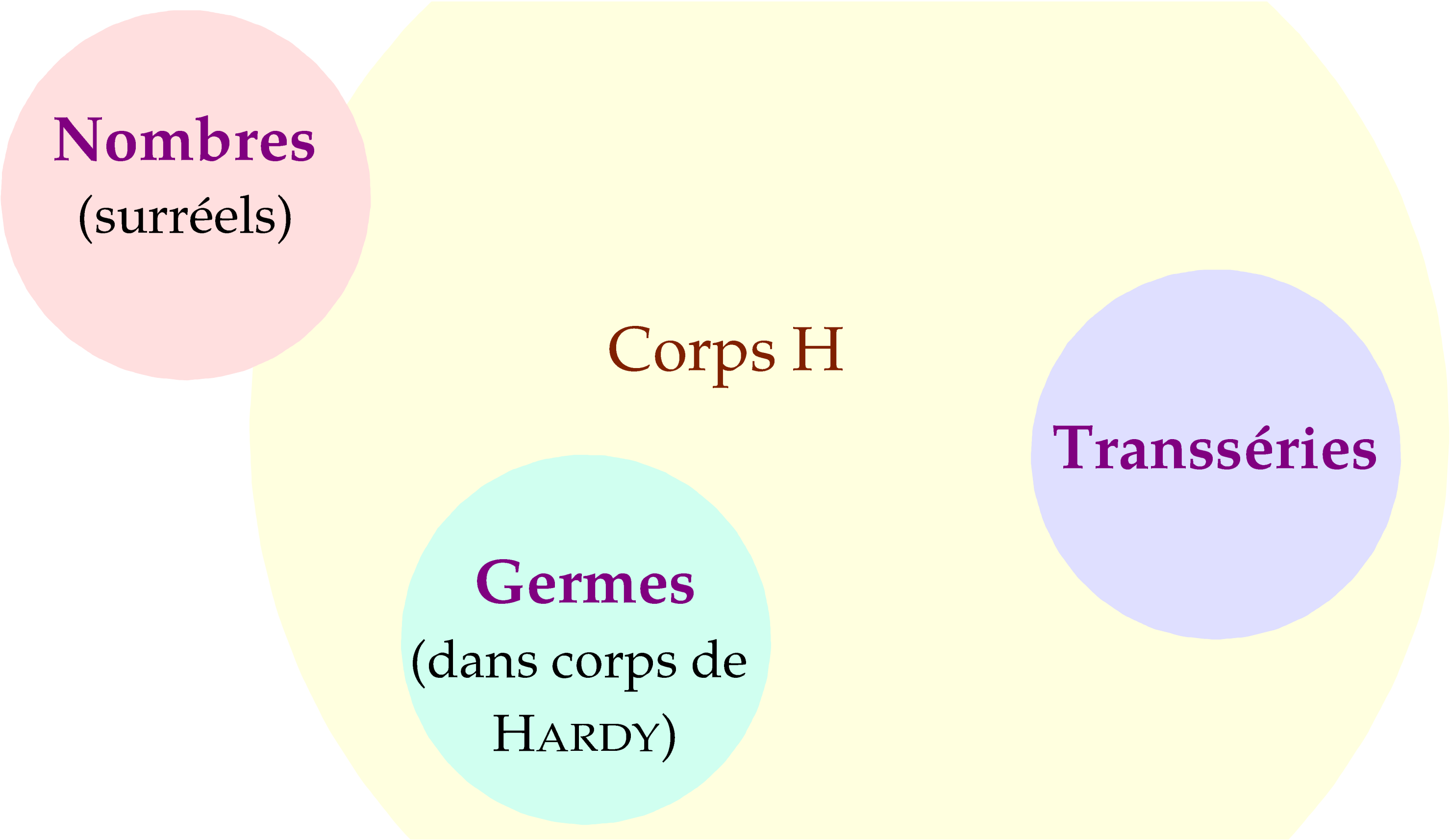
- Ⓐ H *vérifie la propriété différentielle des valeurs intermédiaires.*
- Ⓑ *Pour $A, B \subseteq H$ dénombrables avec $A < B$, il existe un $h \in H$ avec $A < h < B$.*

Corollaire

- Ⓐ H *est élémentairement équivalent à $\mathbb{T}$ en tant que corps différentiel ordonné.*
- Ⓑ *Sous l'hypothèse du continu, les corps de* HARDY *maximaux sont tous isomorphes.*

Éléments de corps H en tant que nombres surréels




Nombres
(surréels)
Corps H
Transséries
Germes
(dans corps de
Hardy)

Plonger des corps H dans No

Théorème (Asch–vdD-vdH, à paraître dans JEMS)

Chaque corps H avec une petite dérivation et corps de constantes $\mathbb{R}$ peut être plongé dans **No** *en tant que corps différentiel ordonné.*

Plonger des corps H dans No

Théorème (Asch–vdD-vdH, à paraître dans JEMS)

Chaque corps H avec une petite dérivation et corps de constantes $\mathbb{R}$ peut être plongé dans **No** *en tant que corps différentiel ordonné.*

Théorème (Asch–vdD-vdH, à paraître dans JEMS)

Soit κ un cardinal non dénombrable. Alors le corps $\mathbf{No}(\kappa)$ des nombres surréels de longueur $<\kappa$ est un sous-modèle élémentaire de **No**.

Plonger des corps H dans No

Théorème (Asch–vdD-vdH, à paraître dans JEMS)

Chaque corps H avec une petite dérivation et corps de constantes $\mathbb{R}$ *peut être plongé dans* **No** *en tant que corps différentiel ordonné.*

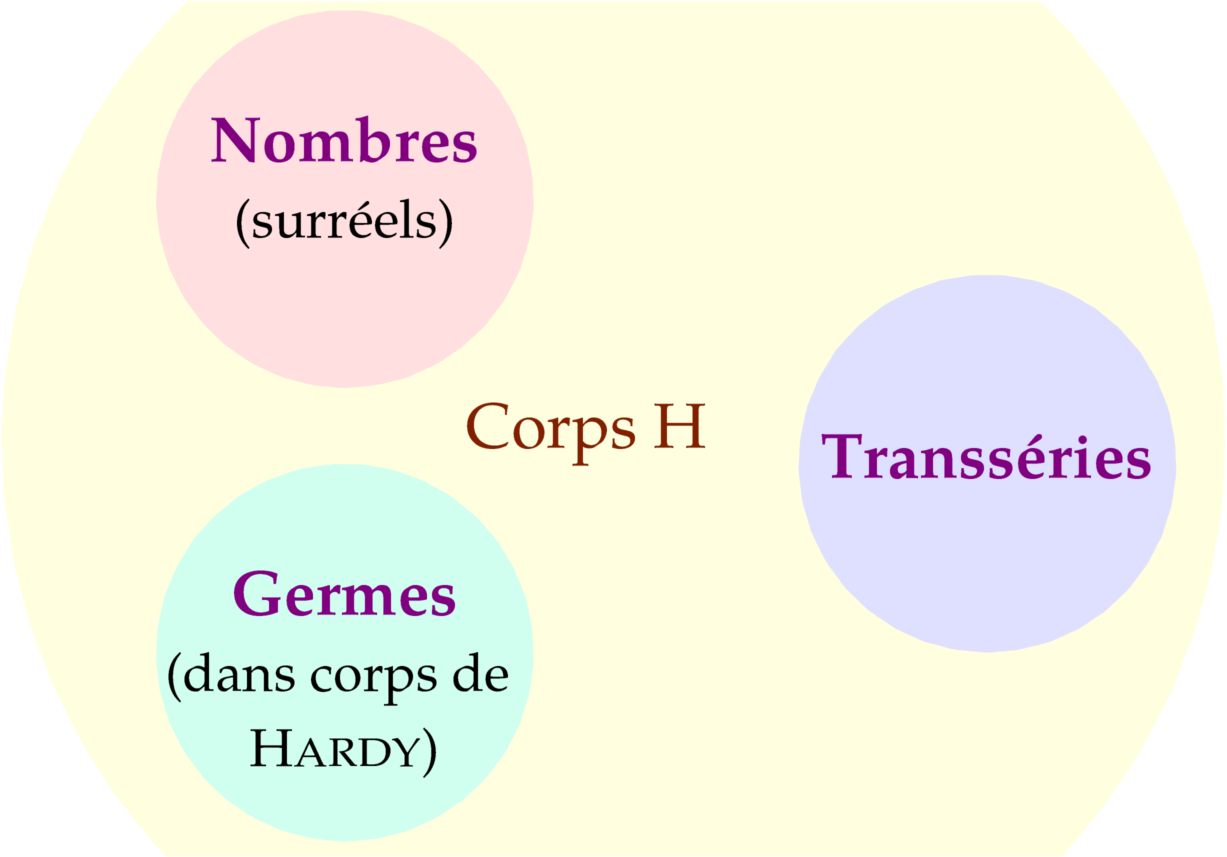
Théorème (Asch–vdD-vdH, à paraître dans JEMS)

Soit κ *un cardinal non dénombrable. Alors le corps* $\mathbf{No}(\kappa)$ *des nombres surréels de longueur* $<\kappa$ *est un sous-modèle élémentaire de* **No**.

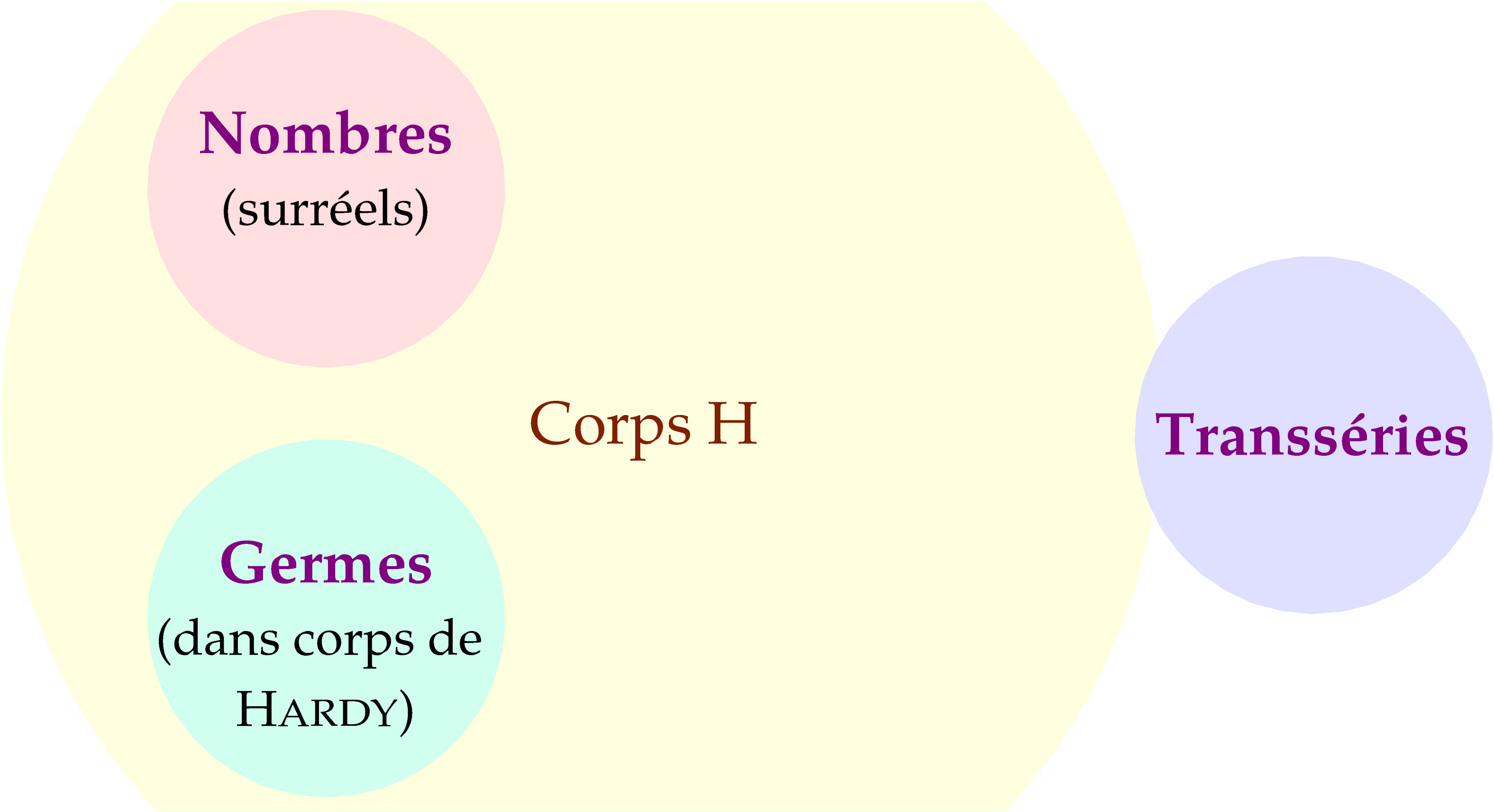
Corollaire

Sous l'hypothèse du continu, tous les corps de Hardy *maximaux sont isomorphes à* $\mathbf{No}(\omega_1)$.

Éléments de corps H en tant que transséries



Éléments de corps H en tant que transséries



Éléments de corps H en tant que transséries

Corps de transséries abstraits

Définition (VAN DER HOEVEN 2000, SCHMELING 2001)

Un corps $\mathbf{T} = \mathbb{R}[[\mathfrak{M}]]$ *avec* $\log\colon \mathbf{T} \dashrightarrow \mathbf{T}$ *(partiel) est un* ***corps de transséries*** *si*

T1. *le domaine de* $\log$ *est* $\mathbf{T}^{>0}$*;*

T2. *pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}$*, on a* $\mathfrak{n} \succ 1$*;*

T3. $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \cdots$*, pour tout* $\varepsilon \in \mathbf{T}$ *avec* $\varepsilon \prec 1$*;*

T4. *pour toute suite* $(\mathfrak{m}_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ *avec* $\mathfrak{m}_{n+1} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}_n$ *pour tout* n*, il existe un indice* n_0 *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}_n$*, on a* $\mathfrak{n} \succcurlyeq \mathfrak{m}_{n+1}$ *et* $(\log \mathfrak{m}_n)_{\mathfrak{m}_{n+1}} = \pm 1$*.*

Corps de transséries abstraits

Définition (VAN DER HOEVEN 2000, SCHMELING 2001)

Un corps $\mathbf{T} = \mathbb{R}[[\mathfrak{M}]]$ *avec* $\log \colon \mathbf{T} \dashrightarrow \mathbf{T}$ *(partiel) est un* ***corps de transséries*** *si*

T1. *le domaine de* $\log$ *est* $\mathbf{T}^{>0}$*;*

T2. *pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}$*, on a* $\mathfrak{n} \succ 1$*;*

T3. $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \cdots$*, pour tout* $\varepsilon \in \mathbf{T}$ *avec* $\varepsilon \prec 1$*;*

T4. *pour toute suite* $(\mathfrak{m}_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ *avec* $\mathfrak{m}_{n+1} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}_n$ *pour tout* n*, il existe un indice* n_0 *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}_n$*, on a* $\mathfrak{n} \succcurlyeq \mathfrak{m}_{n+1}$ *et* $(\log \mathfrak{m}_n)_{\mathfrak{m}_{n+1}} = \pm 1$.

$$\sqrt{x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x} + \mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \qquad \sqrt{x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x} + \mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} + \log\log x} + \log\log x} + \log x$$

Corps de transséries abstraits

Définition (VAN DER HOEVEN 2000, SCHMELING 2001)

Un corps $\mathbf{T}=\mathbb{R}[[\mathfrak{M}]]$ *avec* $\log\colon \mathbf{T} \dashrightarrow \mathbf{T}$ *(partiel) est un* ***corps de transséries*** *si*

T1. *le domaine de* $\log$ *est* $\mathbf{T}^{>0}$;

T2. *pour tout* $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{n}\in\operatorname{supp}\log\mathfrak{m}$, *on a* $\mathfrak{n}\succ 1$;

T3. $\log(1+\varepsilon)=\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3+\cdots$, *pour tout* $\varepsilon\in\mathbf{T}$ *avec* $\varepsilon\prec 1$;

T4. *pour toute suite* $(\mathfrak{m}_n)\in\mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ *avec* $\mathfrak{m}_{n+1}\in\operatorname{supp}\log\mathfrak{m}_n$ *pour tout* n, *il existe un indice* n_0 *tel que pour tout* $n>n_0$ *et tout* $\mathfrak{n}\in\operatorname{supp}\log\mathfrak{m}_n$, *on a* $\mathfrak{n}\succcurlyeq\mathfrak{m}_{n+1}$ *et* $(\log\mathfrak{m}_n)_{\mathfrak{m}_{n+1}}=\pm 1$.

$$\sqrt{x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x}+\mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

$$\sqrt{x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x}+\mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}+\log\log x}+\log\log x}+\log x$$

Corps de transséries abstraits

Définition (van der Hoeven 2000, Schmeling 2001)

Un corps $\mathbf{T} = \mathbb{R}[[\mathfrak{M}]]$ *avec* $\log : \mathbf{T} \dashrightarrow \mathbf{T}$ *(partiel) est un* ***corps de transséries*** *si*

T1. *le domaine de* $\log$ *est* $\mathbf{T}^{>0}$;

T2. *pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}$, *on a* $\mathfrak{n} \succ 1$;

T3. $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \cdots$, *pour tout* $\varepsilon \in \mathbf{T}$ *avec* $\varepsilon \prec 1$;

T4. *pour toute suite* $(\mathfrak{m}_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ *avec* $\mathfrak{m}_{n+1} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}_n$ *pour tout* n, *il existe un indice* n_0 *tel que pour tout* $n > n_0$ *et tout* $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log \mathfrak{m}_n$, *on a* $\mathfrak{n} \succcurlyeq \mathfrak{m}_{n+1}$ *et* $(\log \mathfrak{m}_n)_{\mathfrak{m}_{n+1}} = \pm 1$.

$$\sqrt{x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x} + \mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

$$\sqrt{x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x} + \mathrm{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} + \log\log x} + \log\log x} + \log x$$

Définition

*Une **dérivation transsérielle** sur $\mathbf{T}$ est une dérivation $\partial : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ telle que*

DT1. ∂ *est forte (c.à.d. que* ∂ *préserve la sommation infinie) ;*

DT2. $\partial \log f = \partial f / f$ *pour toute* $f \in \mathbf{T}^{>0}$ *;*

DT3. *les transséries « imbriquées » sont différentiées de manière « naturelle ».*

Définition

*Une **dérivation transsérielle** sur* $\mathbf{T}$ *est une dérivation* $\partial: \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ *telle que*

DT1. ∂ *est forte (c.à.d. que* ∂ *préserve la sommation infinie) ;*

DT2. $\partial \log f = \partial f / f$ *pour toute* $f \in \mathbf{T}^{>0}$ *;*

DT3. *les transséries « imbriquées » sont différentiées de manière « naturelle ».*

Théorème (Berarducci–Mantova, 2015)

$\mathbf{No}$ *est un corps de transséries et* ∂_{BM} *est une dérivation transsérielle.*

Des nombres surréels comme transséries

Définition

*Une **dérivation transsérielle** sur* $\mathbf{T}$ *est une dérivation* $\partial : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ *telle que*

DT1. ∂ *est forte (c.à.d. que* ∂ *préserve la sommation infinie) ;*

DT2. $\partial \log f = \partial f \,/\, f$ *pour toute* $f \in \mathbf{T}^{>0}$ *;*

DT3. *les transséries « imbriquées » sont différentiées de manière « naturelle ».*

Théorème (Berarducci–Mantova, 2015)

$\mathbf{No}$ *est un corps de transséries et* ∂_{BM} *est une dérivation transsérielle.*

Corollaire

Tout corps H avec $\mathbb{R}$ *comme corps de constantes se plonge dans un corps de transséries muni d'une dérivation transsérielle.*

La suite

Après la dérivation : la composition

Après la dérivation : la composition

$$\begin{aligned} \text{Corps de Hardy} &\longrightarrow \text{Expansions o-minimales de } \mathbb{R} \\ \text{Transséries} &\longrightarrow \text{Hyperséries} \\ \text{Nombres surréels avec } \partial_{\mathrm{BM}} &\longrightarrow \text{Nombres surréels avec } \partial, \circ \end{aligned}$$

Équations d'itération

$$\exp_\omega(x+1) = \exp \exp_\omega x$$

→ Croissance plus rapide que $e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \ldots$

→ Kneser 1950 : il existe une solution réelle analytique $\exp_\omega$

Équations d'itération

$$\begin{aligned}\exp_\omega(x+1) &= \exp\exp_\omega x\\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega \exp_{\omega^2} x\\ &\cdots\end{aligned}$$

→ Croissance plus rapide que $e^x, e^{e^x}, \ldots, \exp_\omega x, e^{\exp_\omega x}, \ldots, \exp_\omega \exp_\omega x, \ldots$

→ Schmeling : il existe des solutions réelles analytiques $\exp_{\omega^2}, \exp_{\omega^3} x, \ldots$

Deux sources d'instabilité pour les transséries

Équations d'itération

$$\begin{aligned}\exp_\omega(x+1) &= \exp\exp_\omega x\\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega \exp_{\omega^2} x\\ &\ldots\end{aligned}$$

→ Croissance plus rapide que $e^x, e^{e^x}, \ldots, \exp_\omega x, e^{\exp_\omega x}, \ldots, \exp_\omega \exp_\omega x, \ldots$

→ Schmeling : il existe des solutions réelles analytiques $\exp_{\omega^2}, \exp_{\omega^3} x, \ldots$

Équations fonctionnelles

$$f(x) = \sqrt{x} + e^{f(\log x)} = \sqrt{x} + e^{\sqrt{\log x} + e^{\sqrt{\log\log x} + \cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

→ vdH (utilisant technique d'Écalle) : solution quasi-analytique

Hyperlogarithmes et hyperexponentielles

$$\begin{aligned}
\exp_\omega(x+1) &= \exp \exp_\omega x \\
\exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega \exp_{\omega^2} x \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\log_\omega \log x &= \log_\omega x - 1 \\
\log_{\omega^2} \log_\omega x &= \log_{\omega^2} x - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hyperlogarithmes et hyperexponentielles

$$\begin{aligned}\exp_\omega(x+1) &= \exp\exp_\omega x\\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega\exp_{\omega^2} x\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_\omega\log x &= \log_\omega x-1\\ \log_{\omega^2}\log_\omega x &= \log_{\omega^2} x-1\\ &\vdots\\ \log_\alpha x &= \int\prod_{\beta<\alpha}\frac{1}{\log_\beta x}\end{aligned}$$

Hyperlogarithmes et hyperexponentielles

$$\begin{aligned}
\exp_\omega(x+1) &= \exp \exp_\omega x \\
\exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega \exp_{\omega^2} x \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log_\omega \log x &= \log_\omega x - 1 \\
\log_{\omega^2} \log_\omega x &= \log_{\omega^2} x - 1 \\
&\vdots \\
\log_\alpha x &= \int \prod_{\beta<\alpha} \frac{1}{\log_\beta x}
\end{aligned}$$

Transséries et hyperséries imbriquées

Solutions de $f(x) = \sqrt{x} + \mathrm{e}^{f(\log x)}$:

$$f_0(x)$$

Hyperlogarithmes et hyperexponentielles

$$\begin{aligned} \exp_\omega(x+1) &= \exp \exp_\omega x \\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega \exp_{\omega^2} x \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_\omega \log x &= \log_\omega x - 1 \\ \log_{\omega^2} \log_\omega x &= \log_{\omega^2} x - 1 \\ &\vdots \\ \log_\alpha x &= \int \prod_{\beta<\alpha} \frac{1}{\log_\beta x} \end{aligned}$$

Transséries et hyperséries imbriquées

Solutions de $f(x) = \sqrt{x} + \mathrm{e}^{f(\log x)}$:

$$f_{-1}(x) \quad < \quad f_0(x) \quad < \quad f_1(x)$$

Hyperlogarithmes et hyperexponentielles

$$\begin{aligned}\exp_\omega(x+1) &= \exp\exp_\omega x\\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega\exp_{\omega^2} x\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_\omega\log x &= \log_\omega x-1\\ \log_{\omega^2}\log_\omega x &= \log_{\omega^2} x-1\\ &\vdots\\ \log_\alpha x &= \int\prod_{\beta<\alpha}\frac{1}{\log_\beta x}\end{aligned}$$

Transséries et hyperséries imbriquées

Solutions de $f(x)=\sqrt{x}+\mathrm{e}^{f(\log x)}$:

$$f_{-2}(x)<f_{-1}(x)<f_{-1/2}(x)<f_0(x)<f_{1/2}(x)<f_1(x)<f_2(x)$$

Hyperlogarithmes et hyperexponentielles

$$\begin{aligned}\exp_\omega(x+1) &= \exp\exp_\omega x\\ \exp_{\omega^2}(x+1) &= \exp_\omega\exp_{\omega^2} x\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_\omega\log x &= \log_\omega x-1\\ \log_{\omega^2}\log_\omega x &= \log_{\omega^2} x-1\\ &\vdots\\ \log_\alpha x &= \int\prod_{\beta<\alpha}\frac{1}{\log_\beta x}\end{aligned}$$

Transséries et hyperséries imbriquées

Solutions de $f(x)=\sqrt{x}+\mathrm{e}^{f(\log x)}$: $\longrightarrow$ $f_{\mathbf{No}}(x)$

$$\cdots<f_{-2}(x)<\cdots<f_{-1}(x)<\cdots<f_0(x)<\cdots<f_{1/2}(x)<\cdots<f_1(x)<\cdots<f_2(x)<\cdots$$

Hyperséries $\cong$ Nombres surréels

Conjecture (vdH 2006)

Pour une définition appropriée de la classe $\mathbf{Hy}$ *des hyperséries, on a* $\mathbf{No} \cong \mathbf{Hy}$ *pour l'application* $\phi \colon \mathbf{Hy} \longrightarrow \mathbf{No}; f \longmapsto f(\omega)$.

Conjecture (vdH 2006)

Pour une définition appropriée de la classe $\mathbf{Hy}$ *des hyperséries, on a* $\mathbf{No} \cong \mathbf{Hy}$ *pour l'application* $\phi: \mathbf{Hy} \longrightarrow \mathbf{No}; f \longmapsto f(\omega)$.

Démonstration. Par construction d'un crochet de Conway $\{|\}$ sur $\mathbf{Hy}$.

Hyperséries ≅ Nombres surréels

Conjecture (vdH 2006)

Pour une définition appropriée de la classe **Hy** *des hyperséries, on a* $\mathbf{No} \cong \mathbf{Hy}$ *pour l'application* $\phi: \mathbf{Hy} \longrightarrow \mathbf{No}; f \longmapsto f(\omega)$.

Démonstration. Par construction d'un crochet de Conway $\{|\}$ sur **Hy**.

Exemples :

$$\begin{aligned}
\{x, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}, \ldots |\} &= \exp_\omega x \\
\left\{\sqrt{x}, \sqrt{x} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log x}}, \ldots \middle| \ldots, \sqrt{x} + \mathrm{e}^{2\sqrt{\log x}}, 2\sqrt{x}\right\} &= f_0(x) \\
\left\{x^2, \mathrm{e}^{\log^2 x}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\log^2 \log x}}, \ldots \middle| \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\sqrt{\log \log x}}}}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}}}, \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right\} &= \exp_\omega\left(\log_\omega x + \tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Hyperséries $\cong$ Nombres surréels

Conjecture (vdH 2006)

Pour une définition appropriée de la classe $\mathbf{Hy}$ *des hyperséries, on a* $\mathbf{No} \cong \mathbf{Hy}$ *pour l'application* $\phi: \mathbf{Hy} \longrightarrow \mathbf{No}; f \longmapsto f(\omega)$.

Démonstration. Par construction d'un crochet de Conway $\{|\}$ sur $\mathbf{Hy}$.

Corollaire : définition de ∂ et $\circ$ sur $\mathbf{No}$.

Hyperséries ≅ Nombres surréels

Conjecture (vdH 2006)

Pour une définition appropriée de la classe $\mathbf{Hy}$ *des hyperséries, on a* $\mathbf{No} \cong \mathbf{Hy}$ *pour l'application* $\phi\colon \mathbf{Hy} \longrightarrow \mathbf{No}; f \longmapsto f(\omega)$.

Démonstration. Par construction d'un crochet de Conway $\{\,|\,\}$ sur $\mathbf{Hy}$.

Corollaire : définition de ∂ et $\circ$ sur $\mathbf{No}$.

Problème avec ∂_{BM} :

$$\partial_{\mathrm{BM}}(\exp_\omega(\exp_\omega \omega)) = \exp_\omega'(\exp_\omega x) \neq \exp_\omega'(\exp_\omega x) \exp_\omega' x$$

Programme en cours

- vdH–Schmeling 2001 : extensions avec transséries imbriquées

Programme en cours

- vdH–Schmeling 2001 : extensions avec transséries imbriquées
- vdH–Schmeling 2001 : corps de transséries avec $\exp_{\omega^n}$ et $\log_{\omega^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Programme en cours

- vdH–Schmeling 2001 : extensions avec transséries imbriquées
- vdH–Schmeling 2001 : corps de transséries avec $\exp_{\omega^n}$ et $\log_{\omega^n}$, $n \in \mathbb{N}$
- vdD–vdH–Kaplan 2018 : hyperséries logarithmiques avec ∂ et $\circ$

Programme en cours

- vdH–Schmeling 2001 : extensions avec transséries imbriquées
- vdH–Schmeling 2001 : corps de transséries avec $\exp_{\omega^n}$ et $\log_{\omega^n}$, $n \in \mathbb{N}$
- vdD–vdH–Kaplan 2018 : hyperséries logarithmiques avec ∂ et $\circ$
- Bagayoko–vdH (en cours) : munir **No** de $\exp_\alpha$ et $\log_\alpha$, pour tout α

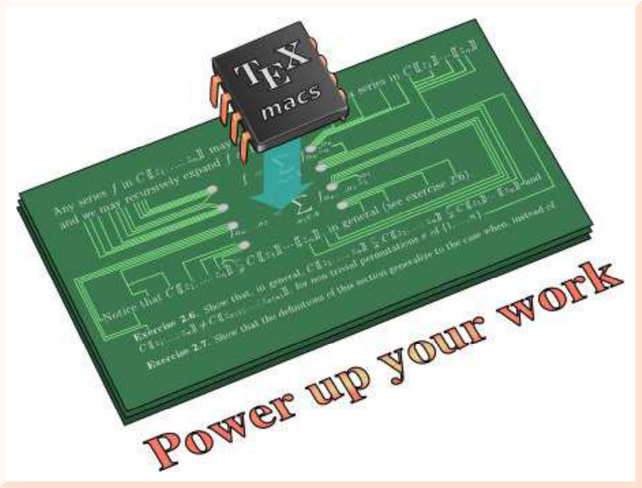
Programme en cours

- vdH–Schmeling 2001 : extensions avec transséries imbriquées
- vdH–Schmeling 2001 : corps de transséries avec $\exp_{\omega^n}$ et $\log_{\omega^n}$, $n \in \mathbb{N}$
- vdD–vdH–Kaplan 2018 : hyperséries logarithmiques avec ∂ et $\circ$
- Bagayoko–vdH (en cours) : munir **No** de $\exp_\alpha$ et $\log_\alpha$, pour tout α
- Programme de thèse de Bagayoko : hyperséries générales avec ∂ et $\circ$

Programme en cours

- vdH–Schmeling 2001 : extensions avec transséries imbriquées
- vdH–Schmeling 2001 : corps de transséries avec $\exp_{\omega^n}$ et $\log_{\omega^n}$, $n \in \mathbb{N}$
- vdD–vdH–Kaplan 2018 : hyperséries logarithmiques avec ∂ et $\circ$
- Bagayoko–vdH (en cours) : munir $\mathbf{No}$ de $\exp_\alpha$ et $\log_\alpha$, pour tout α
- Programme de thèse de Bagayoko : hyperséries générales avec ∂ et $\circ$
- Construction de l'isomorphisme $\mathbf{No} \cong \mathbf{Hy}$

Merci !



http://www.TeXmacs.org