Asymptotique automatique

Par Joris van der Hoeven

Lab. : LIX, École polytechnique, France

Email: vdhoeven@lix.polytechnique.fr

Web : http://lix.polytechnique.fr:80/~vdhoeven/

Soutenance de thèse, 9-1-1997, Palaiseau

Motivation

Systèmes asymptotiques.

– Systèmes d'équations fonctionnelles, qui outre les opérations algébriques usuelles font intervenir des relations asymptotiques d'équivalence et d'inégalité.

– Modélisent le calcul infinitésimal et le calcul asymptotique d'un point de vue formel.

– Problème : résolution automatique des systèmes asymptotiques.

Exemple 1 : inverses fonctionnels.

Le système

$$\begin{cases} xe^x = y\,; \\ 0 < x\,; \\ 1 \prec\!\!\prec x \end{cases}$$

intervient dans l'étude asymptotique des nombres de Bell.

Exemple 2.

Le système

$$\begin{cases} t^3 + xt + y = 0\,; \\ x \prec\!\!\prec 1\,; \\ y \prec\!\!\prec 1 \end{cases}$$

intervient dans l'étude d'un point cuspidal en $x = y = 0$.

Exemple 3 : systèmes exp-logs.

$$\begin{cases} (f \log f - x) + e^{-g} = 0\,; \\ (g^2 - f) - \frac{\log x}{g} = 0\,; \\ x \to \infty. \end{cases}$$

Exemple 4 : équations différentielles.

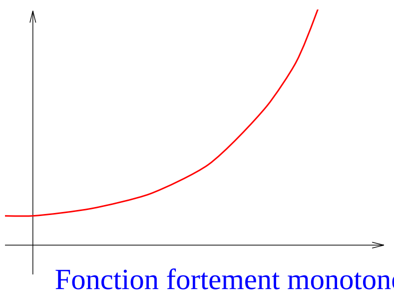
- $f''' - xe^x f' + e^{x^2} f = \Gamma(x^x) \ \ (x \to \infty)$.
- $W' + W^2 = e^{2x} \ \ (x \to \infty)$.
- Systèmes d'équations différentielles ordinaires avec paramètres :

$$\begin{cases} f^2 - e^{ax^2+bx} f' = g\,; \\ g^3 - ax^5 fg + b \log x f = e^x\,; \\ x \to \infty. \end{cases}$$

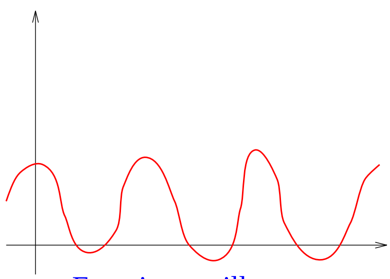
Exemple 5 : comportements oscillants.

Détermination du comportement limite de

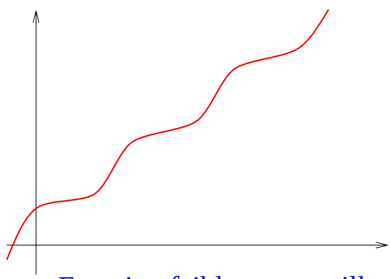
$$\psi(x) = \frac{2 \sin x^2 - \sin(x^3/(x-1))}{3 + \sin ex^2 - \sin(ex^2 + 1)}.$$



Fonction fortement monotone



Fonction oscillante



Fonction faiblement oscillante

Historique abrégé

Asymptotique, aspects analytiques.

– Poincaré, Stieltjes ($\pm$ 1885) : développements asymptotiques.

– Hardy (1910–1911) : Échelles générales, fonctions exp-logs, corps de Hardy.

– Bourbaki, Robinson, Singer, Rosenlicht, Khovanskii (1950–1990) : théorie des corps de Hardy.

– Wilkie, van den Dries, Macintyre, et al. (1991–*) : complétude logique de la théorie des fonctions exp-logs.

Asymptotique, aspects algébriques.

– Newton ($\pm$ 1670) : séries formelles, polygone de Newton.

– Puiseux, Briot, Bouquet, Fine, Smith (1850–1900) : méthode des polygones de Newton, extensions et raffinements.

– Levi-Civita, Hahn, Higman (1890–1950) : séries formelles généralisées. Exemple :

$$z + z^{\pi} + z^{\pi^2} + z^{\pi^3} + \cdots \quad (z \to 0).$$

– Écalle ($\pm$ 1990) : transséries. Exemple :

$$e^{e^x + x^{-1} e^x + x^{-2} e^x + \cdots} + \frac{e^{e^x + x^{-1} e^x + \cdots}}{\log x} + \cdots.$$

Théorie de la resommation.

– Euler ($\pm$ 1750) : resommation “intuitive”.

– Stieltjes, Borel, Hardy (1885–1930): resommation rigoureuse.

– Ramis, Écalle, et al. (1978–*) : théorie de la resommation.

Asymptotique automatique.

– Della-Dora, Tournier, Dicrescenzo et al. (1982) : équations différentielles linéaires.

– Thomann (1990–*) : resommation numérique.

– Shackell (1990) : formes imbriquées de fonctions exp-logs. Exemple :

$$e^{\log^2 x \, e^{e^{\log^3 x(\pi+o(1))}}}$$

– Shackell (1991) : développements de fonctions exp-logs et de fonctions Liouvilliennes.

– Gonnet, Gruntz (1992) : développements de fonctions exp-logs.

– Richardson (1992–1996) : constantes exp-logs.

– Shackell (1991–*) : formes imbriquées de solutions d'équations différentielles.

– Shackell, Salvy (1991–*) : formes imbriquées d'inverses fonctionnelles et de fonctions implicites.

– Salvy, Gruntz (1990–1996) : implantations en MAPLE.

Plan

1. **Fonctions exp-logs**

2. **Transséries**

3. **Équations différentielles algébriques**

4. **Systèmes de transséries en plusieurs variables**

5. **Comportements faiblement oscillants**

Fonctions exp-logs

Les problèmes.

- Trouver la bonne échelle.

- Éviter les annulations indéfinies :

$$f = \frac{1}{1 - x^{-1} - e^{-x}} - \frac{1}{1 - x^{-1}} \quad (x \to \infty).$$

Approche.

Garder les représentations exactes des fonctions que l'on manipule en cours du développement. Bénéficier des tests à zéro effectifs pour ces représentations exactes.

Problème des constantes.

Richardson : test à zéro pour les constantes exp-logs, modulo la conjecture de Schanuel :

Conjecture. (Schanuel) *Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors*

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n, e^{\alpha_1}, \cdots, e^{\alpha_n}] \geqslant n.$$

Théorème. *Il existe un algorithme de développement pour les fonctions exp-logs modulo la conjecture de Schanuel.*

Bases normales

Une base normale est un ensemble ordonné fini $B = \{б_1, \cdots, б_n\}$ d'infinitésimaux, vérifiant

- $б_1 \prec\!\!\!\prec\!\!\!\prec \cdots \prec\!\!\!\prec\!\!\!\prec б_n$;
- $б_1 = \log_l^{-1} x = \log^{-1} \overset{l \text{ fois}}{\cdots} \log x$;
- $\log б_i \in \mathbb{R}[\![б_1; \cdots; б_{i-1}]\!]$, pour tout $i \geqslant 2$.

où $x \to \infty$. Ici

$$б \prec\!\!\!\prec\!\!\!\prec б' \;\Leftrightarrow\; \log|б| \prec\!\!\!\prec \log|б'|.$$

Une base normale génère une échelle asymptotique

$$S_B = \{б_1^{\alpha_1} \cdots б_n^{\alpha_n} | \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple.

$B_1 = \{\log^{-1} x, x^{-1}, x^{-x}, \exp\left(\frac{-x^x}{1-x^{-1}}\right)\}$ est une base normale.

$B_2 = \{x^{-1}, e^{x^2+e^{-x^2}}, e^{-x^2}\}$ n'est pas une base normale.

Premier algorithme

- Calcule pour toute fonction exp-log f, une base normale par rapport à laquelle f se développe.
- La base est calculée graduellement.
- Modulo test à zéro pour fonctions exp-logs à l'infini.

Exemples

Exemple 1.

$$f=\frac{x\log x\ \log^2(xe^x-x^2)}{\log\log(x^2+2e^{e^{3x^3\log x}})}.$$

Base normale :

$$B=\{\log^{-1}x, x^{-1}, e^{-x}, e^{-\log x\ x^3}, e^{-e^{3\log x\ x^3}}\}.$$

Premiers termes du développement :

$$f=\frac{1}{3}+\frac{2\log x}{3x}+\frac{\log^2 x}{3x^2}-\frac{2}{3}e^{-x}+O\left(\frac{\log x}{xe^x}\right).$$

Exemple 2.

$$f=\log\log(x^{xe^x}+1)-\exp\exp(\log\log x+x^{-1}).$$

Base normale :

$$B=\{\log^{-1}\log x, \log^{-1}x, x^{-1}, e^{-x}, e^{-xe^x}\}.$$

Premiers termes du développement :

$$f=-\frac{\log^2 x}{2x}-\frac{\log x}{2x}-\frac{\log^3 x}{6x^2}-\frac{\log^2 x}{2x^2}+O\left(\frac{\log x}{x^2}\right).$$

Représentations Cartésiennes

Motivation

Éviter de grosses annulations dans une même échelle :

$$f = \frac{1}{1 - x^{-1} - x^{-N}} - \frac{1}{1 - x^{-1}},$$

avec N très grand ($N = 10^{10^{10}}$) ou N paramètre.

Idée

Représenter la série comme une série de Laurent en plusieurs variables. Dans l'exemple précédent :

$$f = \frac{1}{1 - z_1 - z_2} - \frac{1}{1 - z_1},$$

avec $z_1 = x^{-1}$ et $z_2 = x^{-N}$.

Avantages.

- Algorithmes rapides pour développer les séries formelles (Brent, Kung, et al.).
- Tests à zéro sur les séries formelles (Péladan-Germa, Shackell, van der Hoeven et al.).
- En particulier des tests à zéro heuristiques.

Théorème. *Il existe un test à zéro à l'infini pour les fonctions exp-logs.*

Fonctions exp-logs paramétrées

Exemple

$$f = e^{x^{-1}+e^{\lambda x}} - e^{x^{-1}} \quad (x \to \infty).$$

Séparation de trois cas :

$$\begin{aligned}
\lambda < 0 \quad &: \quad f = e^{\lambda x} + \frac{e^{\lambda x}}{x} + \frac{e^{\lambda} x}{2x^2} + \cdots + \frac{e^{2\lambda x}}{2} + \frac{e^{2\lambda x}}{2x} + \cdots + \cdots ; \\
\lambda = 0 \quad &: \quad f = (e-1) + \frac{e-1}{x} + \frac{e-1}{x^2} + \cdots ; \\
\lambda > 0 \quad &: \quad f = e^{e^{\lambda x}+x^{-1}} - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \cdots .
\end{aligned}$$

Théorème.

(a) *Il existe un algorithme de développement pour les fonctions exp-logs paramétrées.*

(b) *L'algorithme divise l'espace de paramètres en un nombre fini de régions disjointes (éventuellement vides) ; sur chacun il rend un développement uniforme de la fonction.*

(c) *Les régions sont déterminées par des contraintes exp-logs sur les paramètres ; modulo un oracle qui détermine la cohérence de tels systèmes, on peut donc s'assurer que les régions ne soient pas vides.*

Démonstration. Représentations Cartésiennes et séparation automatique des cas (Duval, Della Dora et al.).

Transséries

Motivation

Pour des comportements asymptotiques généraux, l'échelle des fonctions exp-logs ne suffit plus.

Exemple, conjecture de Hardy : inverse fonctionnelle de $\log x \log\log x$ n'est asymptotique à aucune fonction exp-log (Shackell, van der Hoeven, Macintyre, Marker, Van den Dries).

Différents types de séries.

– séries réticulées (grid-based) :

$$\frac{1}{1-x^{-1}-x^{-e}} = 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-e} + x^{-3} + x^{-e-1} + \cdots$$

Support $\subseteq \alpha_1\mathbb{N} + \cdots + \alpha_n\mathbb{N} + \beta$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$.

– séries de Levi-Civita :

$$x^{-1} + x^{-\pi} + x^{-\pi^2} + \cdots$$

Support : $\{\alpha_n\}_n$, où $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ et $\lim \alpha_n \to \infty$.

– séries bien ordonnées :

$$1+x^{-1/2}+x^{-3/4}+x^{-7/8}+\cdots+x^{-1}+x^{-3/2}+x^{7/4}+\cdots+x^{-2}+\cdots.$$

Différents types de transséries.

- Transséries réticulées :

$$e^{e^x + e^x / \log x + e^x / \log^2 x + \cdots} + 2x^{-1} e^{e^x + e^x / \log x + e^x / \log^2 x + \cdots} + \cdots.$$

- Transséries bien ordonnées de profondeurs exponentielle et logarithmique finies : solution naturelle de :

$$f(x) = x^{-1} + f(x^2) + f(e^{\log^2 x}).$$

- Transséries bien ordonnées de profondeurs exponentielle ou logarithmique transfinies :

$$x^{-1} + e^{-x} + e^{-e^x} + e^{-e^{e^x}} + \cdots.$$

- Transséries plus générales :

$$\int \frac{1}{x \log x \log \log x \cdots}.$$

Propriétés de clôture.

type	propriétés de clôture
Puiseux	équations algébriques
Réticulé	équations différentielles algébriques Composition et inversion fonctionnelle
Prof. exp-log fini	équations fonctionnelles ; composition à droite avec des transséries d'exponentialité nulle
Prof. exp-log inf.	équations fonctionnelles plus générales

Équations différentielles

Théorème. *Soit $\mathfrak{T}$ un corps effectif et automatique de transséries. Alors il existe un algorithme pour calculer la solution générique dans les transséries de n'importe quelle équation différentielle algébrique à coefficients dans $\mathfrak{T}$. Ici*

(a) Les constantes d'intégration (paramètres) nécessaires sont introduites automatiquement.

(b) Les régions sont déterminées par des contraintes du langage de premier ordre de $(\mathbb{R}, +, \exp, >)$.

Surprenant !

Grigoriev et Singer : le problème de décider si une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{Q}$ à une solution dans les séries réticulées est indécidable.

Techniques

– Généraliser la méthode des polygones de Newton.

– Approche de Smith.

– Linéarisation, équations de Ricatti.

– Algèbre différentielle (tests à zéro).

Cas algébrique

Équations polynomiales asymptotiques.

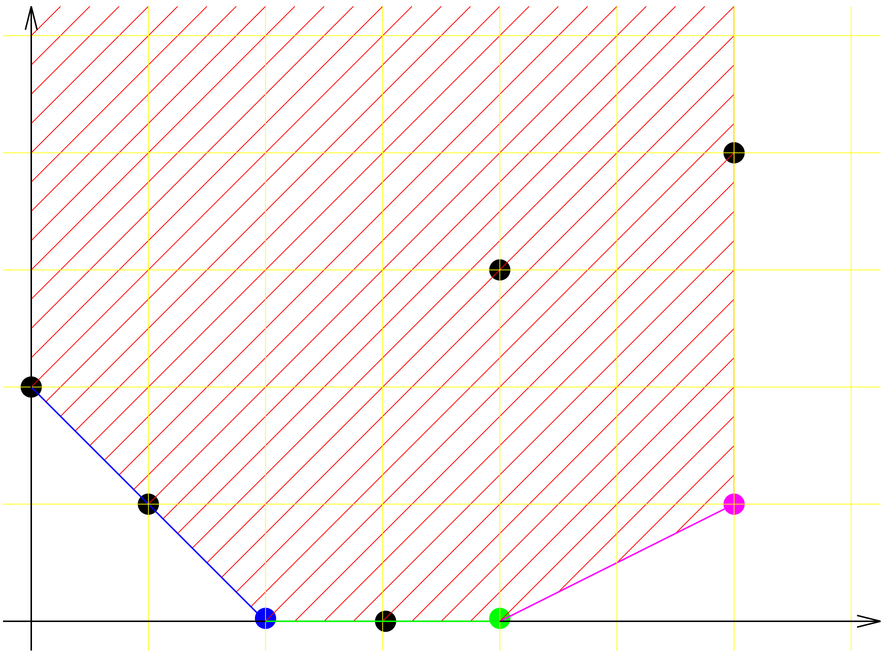
$$P(f) = P_0 + P_1 f + \cdots + P_d f^d = 0 \;\; (f \prec \text{ч}).$$

Raffinements.

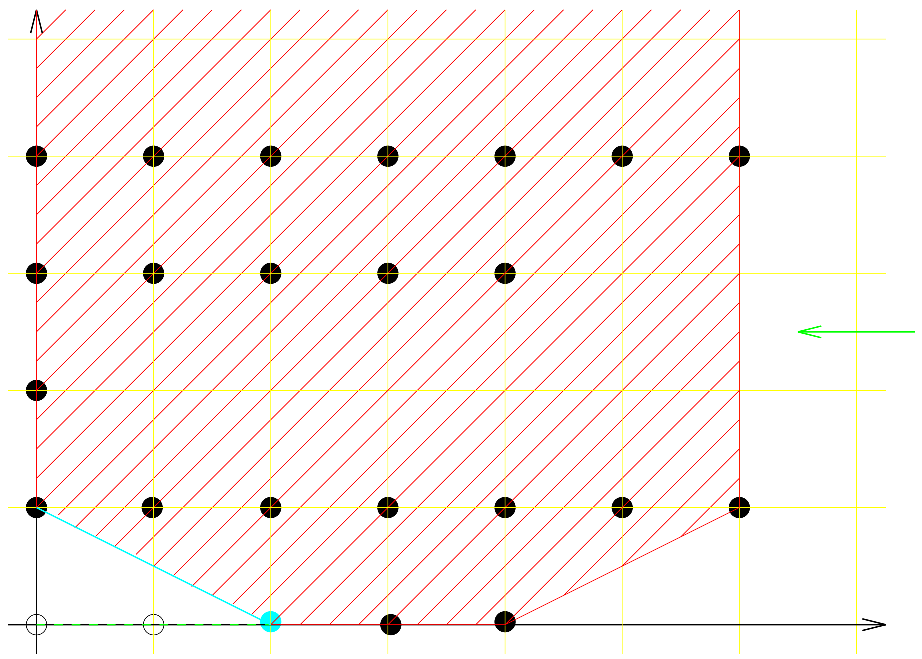
Changement de variable + contrainte.

$$f = \varphi + \tilde{f} \;\; (\tilde{f} \prec \tilde{\text{ч}}), \text{ où } \tilde{\text{ч}} \prec \text{ч}.$$

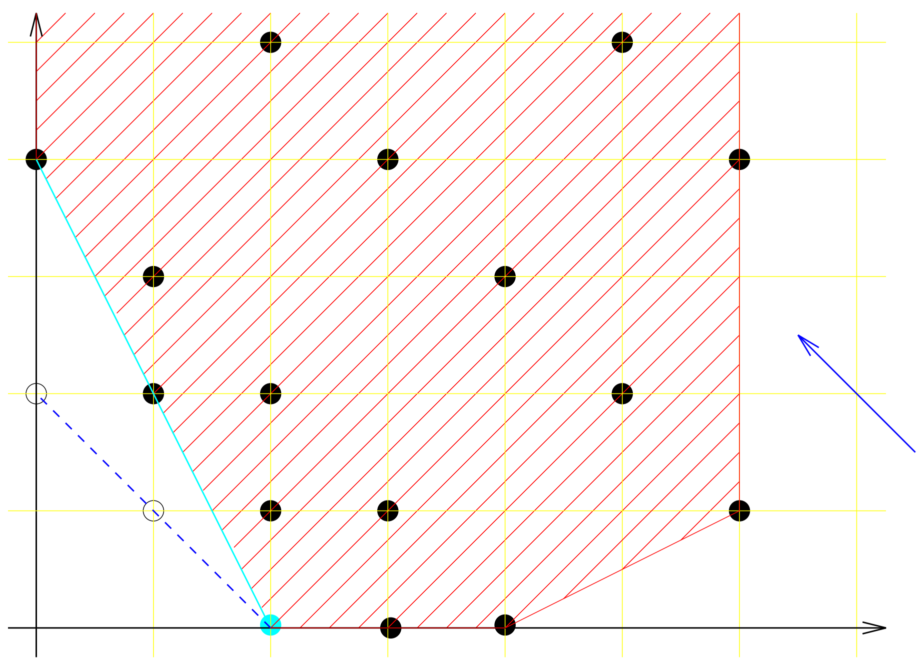
Raffinements admissibles $\longleftrightarrow$ une étape méthode des polygones de Newton.



Exemple : $z^2 - 2zf + f^2 - 2f^3 + (1 + z^3)f^4 - (z^2 + z^5)f^6 = 0,$
où $z \prec 1.$



Raffinement : $f = 1 + \tilde{f}\ \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec 1)$.

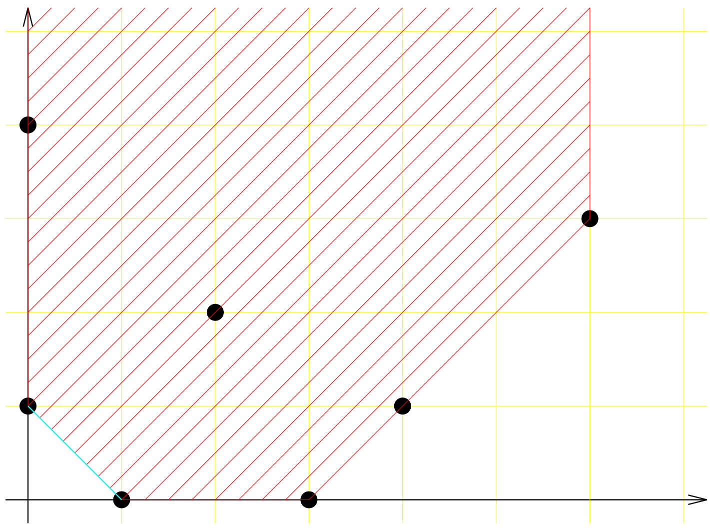


Raffinement : $f = z + \tilde{f}\ \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec z)$.

Équations quasi-linéaires.

Équation dont le degré de Newton est un.

Solutions uniques : théorème des fonctions implicites.



Équation quasi-linéaire :

$z + z^3 + f - 7z^2 f^2 + 5f^3 + zf^4 - z^3 f^6 \;\; (f \prec\!\!\prec 1).$

Approche de Smith adaptée.

$$f^2 - \frac{2}{1-z} f + \frac{1}{(1-z)^2} = z^{10000}.$$

5000 étapes nécessaires avant séparation des racines. Idée : résoudre l'équation dérivée

$$2\varphi - \frac{2}{1-z}\varphi = 0,$$

et effectuer le raffinement $f = \varphi + \tilde{f}$ $(\tilde{f} \prec\!\!\prec 1)$; on obtient alors $\tilde{f}^2 = z^{10000}$.

Cas différentiel

Cadre

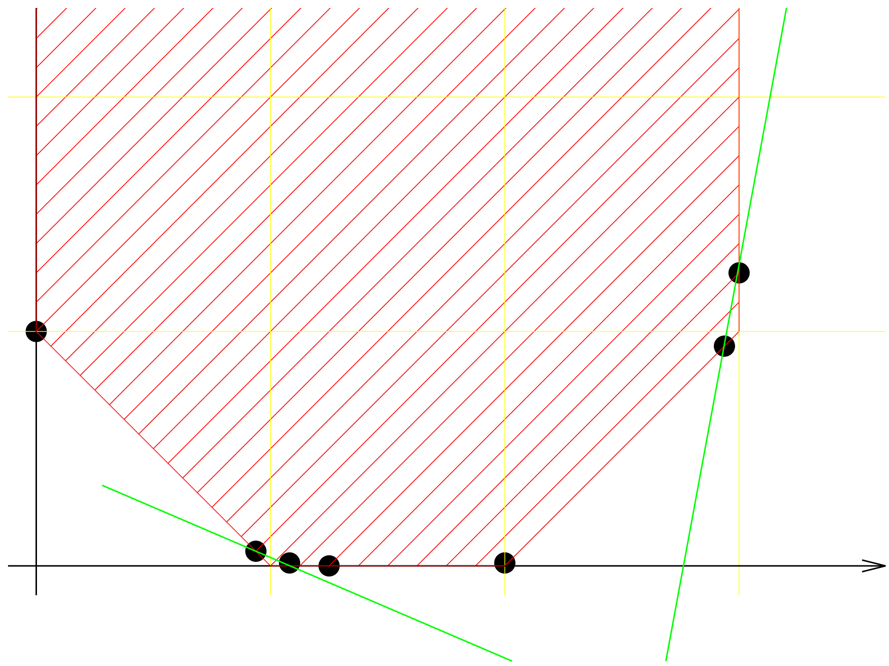
On considère des équations différentielles asymptotiques

$$P(f) = 0 \ \ (f \prec\!\!\prec \text{ч}),$$

P polynôme différentiel. On décompose

$$P(f) = P_0(f) + P_1(f) + \cdots + P_d(f)$$

en composantes homogènes.



Les problème majeurs.

- Distinction raffinements admissibles classiques et non classiques. Cas non classique → Équations de Ricatti.
- Équations quasi-linéaires : pas de solution unique, mais il existe une solution priviligée, dite distinguée.
- Calcul effectif avec des solutions distinguées : tests à zéro.
- Borne sur la profondeur logarithmique de solutions distinguées : problème difficile → régularité de Newton.

Exemple.

Intégrale $\int f$ d'une transsérie f.
Solution distinguée de $g' = f$: constante d'intégration 0.
Si P polynome, comment décider si $P(f) = 0$?

Or on sait calculer les racines de P.
Difficulté : coïncidence des constantes d'intégration.

Solution.

On calcule avec des solutions génériques et pas avec des solutions particulières. La solution générique de $g' = f$ est $g = \int f + \lambda$. Lorsque $\varphi' = f$, pour une racine φ de P, on change de représentation de la solution générique :

$$\int f + \lambda \quad \longrightarrow \quad \varphi + \mu.$$

En général : réduction de Ritt.

Régularité de Newton

Exemple du problème

$$f' + e^{-x} f f'' = 1 + e^{-e^x} \quad (f \prec\!\!\prec e^{x/2})$$

Terme dominant de la solution distinguée : x.
Après raffinement $f = x + \tilde{f}$ $(\tilde{f} \prec\!\!\prec x)$:

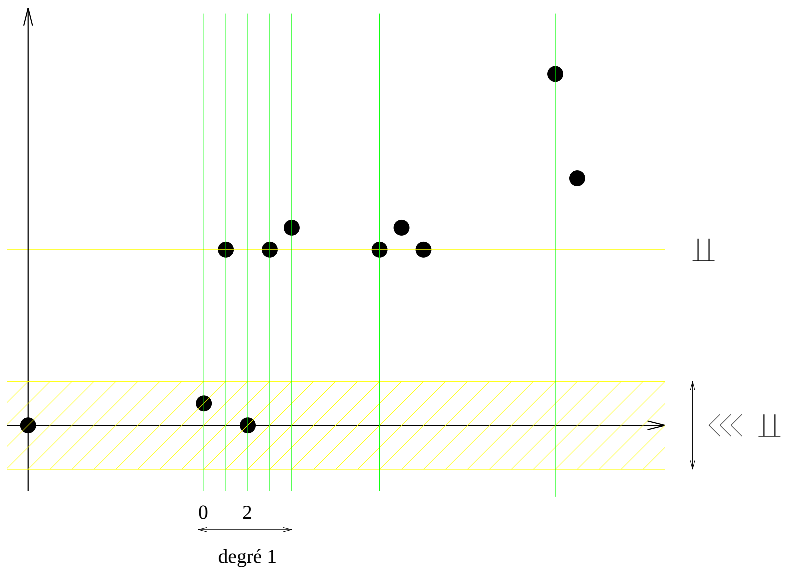
$$\tilde{f}' + x e^{-x} \tilde{f}'' + e^{-2x} \tilde{f} \tilde{f}'' = e^{-e^x} \quad (\tilde{f} \prec\!\!\prec x).$$

Terme dominant de la solution distinguée : $x^{-1} e^{-e^x - x}$.
Encore plus loin : des logarithmes de x.

Raison intuitive $(e^{-e^x})' \succ\!\!\succ e^{-e^x}$.

Régularité de Newton.

Invariant discret non-Archimédien, qui croît lors des raffinements et qui croît strictement lors de l'apparition d'un nouveau logarithme itéré.



Systèmes de transséries en plusieurs variables

Théorème. *Supposons que*

(1) $\mathfrak{C}$ *est un corps exp-log totalement ordonné effectif.*

(2) $\mathfrak{L}$ *est une communauté locale effective sur* $\mathfrak{C}$ *de séries de Laurents.*

Il existe un algorithme qui calcule le développement asymptotique générique de toute fonction $\mathfrak{L}$*-exp-log en plusieurs variables. Ici*

(a) *On authorise l'introduction d'un nombre fini de paramètres dans* $\mathfrak{C}$.

(b) *Les régions sont déterminées par des contraintes exp-logs.*

Démonstration.

– Ordre d'élimination sur les variables.

– Désingularisation par raffinements.

Conséquences

– Résolution asymptotique de systèmes exp-logs en plusieurs variables. En particulier : composition et inversion.

– Résolution théorique de systèmes de transséries en plusieurs variables.

Comportements faiblement oscillants

Question.

Comment calculer la limite supérieure d'une fonction comme

$$\psi(x) = \frac{2\sin x^2 - \sin(x^3/(x-1))}{3 + \sin ex^2 - \sin(ex^2+1)}\ ?$$

Idée.

Réecrire

$$\psi = \varphi(a,\hat{a},b,\hat{b},c,\hat{c}) = \frac{2a - a\hat{c} - c\hat{a}}{3 + b - b\cos 1 - \hat{b}\sin 1}$$

où

$$\begin{aligned} a &= \sin x^2 &&, \quad \hat{a} = \cos x^2; \\ b &= \sin ex^2 &&, \quad \hat{b} = \cos ex^2; \\ c &= \sin(x^2/(x-1)), && \quad \hat{c} = \cos(x^2/(x-1)). \end{aligned}$$

Alors.

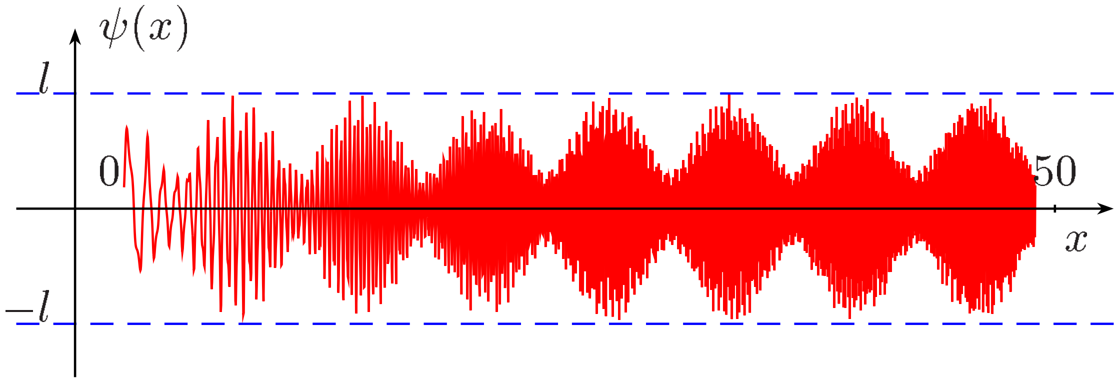
La limite supérieure de ψ est égale à la valeur maximale de φ pour

$$a^2 + \hat{a}^2 = b^2 + \hat{b}^2 = c^2 + \hat{c}^2 = 1,$$

c.à.d.

$$\limsup_{x\to\infty} \psi(x) = \frac{6}{5 + \cos 1 - \sqrt{3}\ \sin 1} = l.$$

Théorème. *Ceci marche en général.*



Théorème. *Il existe un algorithme qui calcule le développement asymptotique de toute fonction sin-exp-log de profondeur trigonométrique $\leqslant 1$, sauf dans des cas "dégénérés, de mesure nulle".*

Origine cas dégénérés.

$$2 - \sin x - \sin ex \geqslant_{\infty} \frac{1}{\Gamma(x+2)}.$$

Théorème. *Il existe un algorithme pour résoudre toute équation différentielles linéaire à coefficients dans un corps effectif automatique de transséries.*