Évaluation rapide de fonctions holonômes

par Joris van der Hoeven

LIFL, Villeneuve d'Ascq
LIX, École Polytechnique
email : `vdhoeven@lix.polytechnique.fr`
web : `http://ultralix.polytechnique.fr/~vdhoeven`

Aleph et Géode, le 17 mars 1998

Nombres effectifs

$$\text{Nombre effectif}$$
$$=$$
$$\text{Nombre } z \in \mathbb{C}$$
$$+$$
$$\text{Algorithme d'approximation pour } z$$

Algorithme d'approximation

Entrée : précision $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$;

Sortie : $z' \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}[i]$ avec $|z' - z| < \varepsilon$.

Complexité : temps de calcul pour $\varepsilon = 10^{-n}$.

Multiplication et division

Naive : $M(n) = O(n^2)$;

Karatsuba : $M(n) = O(n^{\log 3/\log 2})$;

FFT : $M(n) = O(n \log n \log \log n)$.

Fonctions holonômes

Définition

Fonction f vérifiant

$$P_r(z)f^{(p)}(z) + \cdots + P_0(z)f(z) = 0,$$

où $P_i \in \mathbb{K}[z]$ et $P_r \neq 0$.
f défini sur surface de Riemann.
Seules singularités possibles : racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ de P_r.

Exemples

- $\exp, \log, \sin, \cos, \arcsin, \arccos, \arctan$;
- $\mathrm{erf}, \mathrm{Si}$, etc.
- Fonctions algébriques ;
- Fonctions de Bessel ;
- Fonctions hypergéométriques ;
- Somme, produit de deux fonctions holonômes ;
- Dérivé, intégrale d'une fonction holonôme.

Prolongement analytique

Notation : $F(\zeta) = \begin{pmatrix} f(\zeta) \\ \vdots \\ f^{(r-1)}(\zeta) \end{pmatrix}$.

Matrices de transition

Condition initiale : donné de $F(\zeta_0)$ pour certain ζ_0.
$\zeta_0 \rightsquigarrow \zeta_1$: chemin allant de ζ_0 vers ζ_1.
Alors : $F(\zeta_1)$ dépend linéairement de $F(\zeta_0)$:

$$F(\zeta_1) = \Delta_{\zeta_0 \rightsquigarrow \zeta_1} F(\zeta_0).$$

$\Delta_{\zeta_0 \rightsquigarrow \zeta_1}$: matrice de transition le long de $\zeta_0 \rightsquigarrow \zeta_1$.

Observation

$\Delta_{\zeta_0 \rightsquigarrow \zeta_1}$ ne dépend que de l'équa. diff. et la classe d'homotopie de la projection $z_0 \rightsquigarrow z_1$ du chemin dans $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$:

$$\Delta_{z_0 \rightsquigarrow z_1} = \Delta_{\zeta_0 \rightsquigarrow \zeta_1}.$$

Transitivité

Pour la composée $z_0 \rightsquigarrow z_1 \rightsquigarrow z_2$ de deux chemins, on a

$$\Delta_{z_0 \rightsquigarrow z_1 \rightsquigarrow z_2} = \Delta_{z_1 \rightsquigarrow z_2} \Delta_{z_0 \rightsquigarrow z_1}.$$

Partie I

Approximation des matrices de transition

Estimation des erreurs

Choix d'une discrétisation du chemin

Complexité asymptotique

Stratégie

Développer

Réduction : point de départ en 0.

D'evelopper $f(z)$ en série de Taylor

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots.$$

Borner

Borner les termes restes

$$|f_n z^k + f_{k+1} z^k + \cdots| \leqslant \frac{B\sigma^k z^k}{1 - z\sigma}$$

en trouvant B et σ avec

$$|f_k| \leqslant B\sigma^k \quad \forall k.$$

Approximer

Question : $f(z)$ à ε près ?

Trouver k avec

$$\left|\frac{B\sigma^k z^k}{1 - z\sigma}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Approximer

$$f_0 + f_1 z + \cdots + f_{k-1} z^{k-1}$$

de façon *rapide* à $\varepsilon/2$ près.

Approximation de e

Dichotomie (Brent)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & +1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{24} & +\frac{1}{120} & +\frac{1}{720} & +\frac{1}{5040} & +\cdots = \\
\frac{2}{1} & & +\frac{4}{6} & & +\frac{6}{120} & & +\frac{8}{5040} & & +\cdots = \\
\frac{16}{6} & & & & +\frac{260}{5040} & & & & +\cdots = \\
\frac{13700}{5040} & & & & & & & & +\cdots
\end{array}
$$

Les calculs

<table>
<tr><td>$1(1)$</td><td>$1(1)$</td><td>$1(2)$</td><td>$1(3)$</td><td>$1(4)$</td><td>$1(5)$</td><td>$1(6)$</td><td>$1(7)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1 \times 1 + 1$
(1×1)</td><td colspan="2">$1 \times 3 + 1$
(2×3)</td><td colspan="2">$1 \times 5 + 1$
(4×5)</td><td colspan="2">$1 \times 7 + 1$
(6×7)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2(1)$</td><td colspan="2">$4(6)$</td><td colspan="2">$6(20)$</td><td colspan="2">$8(42)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$2 \times 6 + 4$
(1×6)</td><td colspan="4">$6 \times 42 + 8$
(20×42)</td></tr>
<tr><td colspan="4">$16(6)$</td><td colspan="4">$260(840)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$16 \times 840 + 260$
(6×840)</td></tr>
<tr><td colspan="8">$13700(5040)$</td></tr>
</table>

Relations de récurrence

Dictionnaire

$$\begin{aligned}(zf)_k &= f_{k-1} \quad (k>0)\,;\\ (f')_k &= (k+1)f_{k+1}.\end{aligned}$$

Conséquence

Les coefficients de

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots$$

vérifient une relation de récurrence

$$Q_q(k)f_{k+q} + Q_{q-1}(k)f_{k+q-1} + \cdots + Q_0(k)f_k = 0,$$

avec $Q_0, \ldots, Q_q \in \mathbb{K}[k]$ et

- $Q_q(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- $\deg Q_i \leqslant \deg Q_q$ pour tout i.

Écriture matricielle

$$F_k = \begin{pmatrix} f_k \\ \vdots \\ f_{k+q-1} \end{pmatrix}.$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathrm{O} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \mathrm{O} & & 1 \\ -\frac{Q_0(k+1)}{Q_q(k+1)} & -\frac{Q_1(k+1)}{Q_q(k+1)} & \cdots & -\frac{Q_{q-1}(k+1)}{Q_q(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$F_{k+1} = M_k F_k$$

Question

Évaluation rapide de

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= F_0 + F_1 z + \cdots + F_{k-1} z^{k-1} \\ &= (I + M_0 z + \cdots + M_{k-1} \cdots M_0 z^{k-1}) F_0. \end{aligned}$$

L'algorithme

Notations

$$A_{k;l} = M_{k+l-1} \cdots M_k z^l \,;$$
$$B_{k;l} = I + M_k z + \cdots + M_{k+l-1} \cdots M_k z^{l-1}.$$

On a

$$A_{k;l}\, F_k = F_{k+l}\, z^l \,;$$
$$B_{k;l}\, F_k = F_k + \cdots + F_{k+l-1}\, z^{l-1}.$$

Calcul par dichotomie

$l = l_1 + l_2$, avec $l_1 = \lfloor \frac{l_1}{2} \rfloor$.

$$A_{k;l} = A_{k+l_1;l_2}\, A_{k;l_1} \,;$$
$$B_{k;l} = B_{k;l_1} + B_{k+l_1;l_2}\, A_{k;l_1}.$$

En réalité...

Écrire

$$A_{k;l} = q_{k;l}^{-1}\, A'_{k;l} \,;$$
$$B_{k;l} = q_{k;l}^{-1}\, B'_{k;l},$$

où $q_{k;l}$ dans $\mathbb{Z}$ et coefficients $A'_{k;l}, B'_{k;l}$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

À nouveau : formules de dichotomie.

Théorème 1 *L'algorithme par dichotomie calcule* $B_{0;k}$ *en temps* $O(M(k\log^2 k))$.

Matrices de transition

$B_{0;k}$ donne $f(z)$ en fonction des C.I. F_0.
Comment approximer $f'(z), f''(z), \dots$?

- $f', f'', \dots$ aussi holonomes $\to$ même algorithme.
- Approximer $f(z+\varepsilon)$ dans l'anneau $\mathbb{K}[\varepsilon]/(\varepsilon^r)$.

Idée pour calculer bornes d'erreur

N_k a entrées dans $\mathbb{K}(k)$, avec $N_\infty = \lim_{k\to\infty} N_k$ fini.
$N_{k-1}\cdots N_0$ asymptotiquement voisin de N_∞^k.
Trigonaliser N_∞ et estimer l'erreur.

Théorème 2 *Il existe un algorithme, qui pour tout* $\rho < \min(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_l|)$ *calcule un* B *tel que*

$$||N_k|| \leqslant \frac{B}{\rho^k},$$

où $||\cdot||$ *est la norme sup des entrées.*

Choix du chemin

Hypothèses

- U domaine sur lequel $|\Delta|$ borné ($\Rightarrow$ bornes coeffs) ;
- $z_0, z_1 \in \mathbb{K}$ t.q. disque fermée $D(z_0, |z_1 - z_0|)$ dans U ;
- $\rho(z)$ distance d'un point vers δU.

Théorème 3 $\Delta_{z_0 \to z_1}$ *s'évalue à n décimales en temps*

$$O(M(n(s + \log n) \log n \log^{-1} \tau)),$$

où $s = \mathtt{size}(z_0) + \mathtt{size}(z_1)$, $\tau = \frac{\rho(z_0)}{|z_1 - z_0|}$ *et* $\log\log\tau = O(n)$.

Chemin $z_0 \rightsquigarrow z_1$ arbitraire dans U

Approximer z_0, z_1 par suite de nombres dans $\mathbb{K}$, en doublant la précision à chaque étappe $\longrightarrow$ $\Delta_{z_0 \rightsquigarrow z_1}$ se calcule en temps $O(M(n \log^2 n \log\log n))$ à n décimales près.

Monodromie

$\tau = (2 \sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$;
Minimiser $-(\alpha \log(2 \sin \frac{\alpha}{2}))^{-1}$ $\longrightarrow$ $\alpha = \frac{2\pi}{17}$.

Approcher des singularités

Approcher par facteurs $\lambda < 1$.
Minimiser $(\log \lambda \log(1 - \lambda))^{-1}$ $\longrightarrow$ $\lambda = \frac{1}{2}$.

Partie II

Rappels

Matrices de transition singulières

Formules de récurrence pour coefficients

Application aux polylogarithmes

Matrices de transition

Une autre interprétation

Dans un point non singulier z, les solutions

$$f^{[0;z]}, \ldots, f^{[r-1;z]}$$

de l'équation $Lf = 0$ avec

$$\frac{d^j f^{[i;z]}}{dz^j}(z) = \delta_i^j$$

forment une base canonique de solutions.

La matrice de transition $\Delta_{z \rightsquigarrow z'}$ exprime les valeurs de

$$f^{[0;z]}(z'), \ldots, f^{[r-1;z]}(z')$$

en suivant $z \rightsquigarrow z'$ en fonction de $f^{[0;z']}, \ldots, f^{[r-1;z']}$.

Matrices de transition singulières

Supposons

– Il existe une base canonique

$$f^{[0]}, \ldots, f^{[r-1]}$$

de solutions dans la singularité $z = 0$;

– On peut associé des véritables fonctions aux $f^{[i]}$, définies sur un voisinage de 0 de la surface de Riemann de log.

Matrices de transition singulières

$\Delta_{0_\alpha \to z}$: exprime valeurs des $f^{[i]}$ en z par rapport aux $f^{[0;z]}, \ldots, f^{[r-1;z]}$:

$$F(z) = \Delta_{0_\alpha \to z} F(0_\alpha),$$

où $\alpha = \arg z$ sur surface de Riemann de log.

Rappels

Notations

$\delta = z\frac{d}{dz}$;

$L = L_r\delta^r + \cdots + L_0$;

$L_0, \ldots, L_r \in \mathbb{K}[z], \quad L_r \neq 0.$

Base de solutions de $Lf = 0$

On peut calculer une base de r solutions de la forme

$$f(z) = [f_0(\sqrt[p]{z}) + \cdots + f_{t-1}(\sqrt[p]{z}) \log^{t-1} z]\ z^\alpha e^{P(1/\sqrt[p]{z})},$$

- $f_0, \cdots, f_{t-1}$ dans $\mathbb{K}^{alg}[[\sqrt[p]{z}]]$;
- $\alpha \in \mathbb{K}^{alg}$;
- $P \in \mathbb{K}^{alg}[1/\sqrt[p]{z}]$.

Réduction au cas $p = 1, \alpha = 0, P = 0$

Réduction sans perte de généralité utilisant

$$\begin{aligned} L_{\circ z^p} f &= L(f \circ z^p)\,; \\ L_{\times g} f &= L(fg). \end{aligned}$$

Exemple

$$z^4\delta^2 g - (2z^2 + z^5)\delta g + (1 + 2z^2 + z^3)g = 0$$

Oracle : solutions dans $\mathbb{K}[\log z]e^{-1/z}$.
Réécrire équation en $f = e^{1/z}g$:

$$\delta^2 f - z\delta f = 0$$

Chercher solution sous forme

$$f = f_0 + f_1 \log z,$$

$f_0, f_1 \in \mathbb{K}[z]$. Récurrences pour coeffients :

$$\begin{aligned} k^2 f_{1,k} &= (k-1)f_{1,k-1}\,; \\ k^2 f_{0,k} &= (k-1)f_{0,k-1} - 2kf_{1,k} + f_{1,k-1}. \end{aligned}$$

Solutions :

$$\begin{aligned} f^{[0]} &= 1 \\ f^{[1]} &= \log z + 1 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{18}z^2 + \cdots. \end{aligned}$$

En général

Relations de récurrence

$$f = f_0 + f_1 \log z + \cdots + f_{t-1} \log^{t-1} z,$$

Il existe relation

$$F_{k+1} = N_k F_k, \tag{1}$$

pour presque tout k, où

$$F_k = \mathrm{Vect}(f_{0,k}, \ldots, f_{0,k+q-1}, \ldots, f_{t-1,k}, \ldots, f_{t-1,k+q-1})$$

et les entrées de N_k sont dans $\mathbb{K}(k)$.

Cas dégénéré

Pour un nombre fini de k, (1) est faux.
Or il existe une base de solutions canoniques pour $Lf = 0$, dont les coefficients F_k vérifient

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= N_k F_k, & k \text{ générique}\,; \\ F_{k+1} &= N'_k F_k, & k \text{ dégénéré}. \end{aligned}$$

Ici : N'_k matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ pour k dégénérés.

Conséquence

Algorithme rapide pour calculer $F_0 + F_1 z + \cdots + F_{k-1} z^{k-1}$.

Convergence

Convergence cas $p = 1, \alpha = 1, P = 0$

L est régulier si $L_r(0) \neq 0$.

Lemme 1 *Si L est régulier, alors $\lim_{k \to \infty} N_k = N_\infty$ est fini.*

Conséquence

On a convergence ;
On a un algorithme pour borner les coefficients.

Cas général

L est quasi-régulier si pour tout (p, α, P) tel qu'il existe des solutions formelles

$$f \in \mathbb{K}^{alg}[[\sqrt[p]{z}]][\log z] z^\alpha e^{P(1/\sqrt[p]{z})}$$

de $Lf = 0$, on tombe dans le cas régulier après réduction au cas $p = 0, \alpha = 1, P = 0$.

Théorème 4 *Supposons L quasi-régulier. Alors les solutions canoniques de $Lf = 0$ sont convergentes. Il existe un algorithme qui détermine leur rayon de convergence r. Pour tout $z \in \mathbb{K}$ et $\alpha = \arg z$ avec $|z| < r$, on peut approximer $\Delta_{0_\alpha \to z}$ à $\varepsilon = 2^{-n}$ près en temps $O(M(n \log^2 n))$.*

Application aux polylogarithmes

Pour $r \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{Li}_r(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^r}.$$

On a

$$\zeta(r) = \lim_{z \to 1} \mathrm{Li}_r(z).$$

Théorème 5 – Li_r *vérifie une équation régulière en* 0 *et en* 1*, qui sont ses seules singularités.*

– $\Delta_{0_0 \to \frac{1}{2} \to_{-\pi} 1}$ *peut être approximé à* n *décimales en temps* $O(M(n \log^2 n))$*.*

– $\zeta(r)$ *peut être approximé à* n *décimales en temps* $O(M(n \log^2 n))$*.*

Polylogarithmes généralisés

Pour mots $w \in X^* = \{0,1\}^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{0^r} &= \frac{1}{r!}\log^r z\,; \\ \mathrm{Li}_{0w}(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_w(t)\frac{dt}{t}\,; \\ \mathrm{Li}_{1w}(z) &= \int_0^z \mathrm{Li}_w(t)\frac{dt}{1-t}, \end{aligned}$$

On a $\mathrm{Li}_r = \mathrm{Li}_{0^{r-1}1}$.
$\zeta(w) = \lim_{z\to 1}\mathrm{Li}_w(z)$ existe pour $w \in 0X^*1$.

Régularité en 0

Pour

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= \delta\,; \\ D_{0w} &= D_w\delta\,; \\ D_{1w} &= zD_w\left(\frac{1-z}{z}\delta\right), \end{aligned}$$

on a $D_w\,\mathrm{Li}_w = 0$. Puis pour w de longueur r :

$$D_{0w,r+2} = D_{1w,r+2} = D_{w,r+1}.$$

Régularité en 1

Symmérique : $z \longleftrightarrow 1-z$.

Autres applications

Transitivité

$z \to z'$: chemin près de la singularité 0.

$$\Delta_{z \to z'} = \Delta_{0_\alpha \to z'} \Delta_{0_\alpha \to z}^{-1}.$$

Monodromie

$z \circlearrowleft z$: chemin autour de 0 avec z petit.

$$\Delta_{z \circlearrowleft z} = \Delta_{z \to_0 0_{2\pi} \to z} = \Delta_{0_0 \to z} R_0 \Delta_{0_0 \to z}^{-1}.$$

Instabilité numérique

$$\Delta_{0_\alpha \to z} = U_{0_\alpha \to z} E_{0_\alpha \to z},$$

avec

$$E_{0_\alpha \to z} = \begin{pmatrix} e^{P_0(1/\sqrt[p_0]{z})} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & e^{P_{r-1}(1/\sqrt[p_{r-1}]{z})} \end{pmatrix}.$$

$U_{0_\alpha \to z}$ contient que des combinaisons linéaires de produits de la forme

$$(f_j^{[i]})^{(a)} (\log z)^b z^c,$$

avec $a, b \in \mathbb{N}$ petits et $c \in \mathbb{K}^{alg}$.