Un théorème de valeurs intermédiaires différentiel

par Joris van der Hoeven

C.N.R.S., Université Paris-Sud

Lille, 11/3/2002

Fait avec GNU $\mathrm{T_EX_{MACS}}$ (www.texmacs.org)

Partie I

Transséries

Corps $\mathbb{T}$ de transséries réticulées en $x \succ 1$:

- Structure sérielle et ordre total $\preccurlyeq$.
- Stable sous exp et log.
- Réel algébriquement clos.
- Stable sous différentiation, intégration.
- Stable sous composition, inversion.

Origines

Théorie des modèles.

- Dahn & Göring, 1984, 1986
- Van den Dries, Ressayre, etc. 199*

Analyse.

- Écalle, 1989, 1992

Calcul formel.

- Shackell, Salvy, etc. 1990-*
- vdH, 1994-*

Exemples

- $1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-e}+x^{-3}+x^{-e-1}+\cdots$
- $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+e^{-x}+\frac{e^{-x}}{x}+\cdots+e^{-2x}+\cdots$
- $1+2^{-x}+3^{-x}+4^{-x}+\cdots$
- $x^{-1}+x^{-\pi}+x^{-\pi^2}+x^{-\pi^3}+\cdots$
- $x+\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}+\cdots$
- $e^{e^x+\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+\cdots}+x^{-1}\,e^{e^x+\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+\cdots}+\cdots$
- $\Gamma(x-\pi)+\log\Gamma(e^{\Gamma(x^2)})\,x^{x^{x^x}}$
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{e^x}}+\frac{1}{e^{e^{e^x}}}+\cdots$
- $f(x)=\frac{1}{x}+f(x^2)+f(e^{\log^2 x})$
- $e^{\sqrt{x}+e^{\sqrt{\log x}+e^{\sqrt{\log\log x}+\iddots}}}$

Séries bien ordonnées

- Corps totalement ordonné de constantes C.
- Groupe de monômes $\mathfrak{M}$, avec un ordre total $\succcurlyeq$.
- [Hahn 1907] Ensemble des séries bien ordonnées

  $$C[[\mathfrak{M}]] = \{f : \mathfrak{M} \rightarrow C \,|\, \text{supp } f \text{ est bien ordonnée}\}$$

  forme un corps totalement ordonné.
- $f = c_f \, \mathfrak{d}_f \, (1 + \delta_f)$
- $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \mathfrak{d}_f \preccurlyeq \mathfrak{d}_g$
- Décomposition canonique :

$$\begin{array}{ccccc} f = f^{\uparrow} & + & f^{=} & + & f^{\downarrow} \\ \| & & \| & & \| \\ \displaystyle\sum_{\mathfrak{m} \succ 1} f_{\mathfrak{m}} \, \mathfrak{m} & & f_1 & & \displaystyle\sum_{\mathfrak{m} \prec 1} f_{\mathfrak{m}} \, \mathfrak{m} \end{array}$$

Séries rétuculées

f rétuculée $\Longleftrightarrow \exists \; \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k \prec 1$ et $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_l$:

$$\text{supp } f \subseteq \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\}^* \{\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_l\}.$$

$C[\![\mathfrak{M}]\!] \subseteq C[[\mathfrak{M}]]$: corps de séries réticulées.

Construction de $\mathbb{T}$

Transséries logarithmiques

Commencer avec le groupe de monômes

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{E}_0 = x^{\mathbb{R}} (\log x)^{\mathbb{R}} (\log \log x)^{\mathbb{R}} \cdots$$

et le logarithme sur $\mathbb{R}[[\mathfrak{L}]]^{+}_{*}$:

$$\log (c\, x^{\alpha_0} \cdots \log_l^{\alpha_l} x (1 + \delta)) = \\ \log c + \alpha_0 \log x + \cdots + \alpha_l \log_{l+1} x + \log (1 + \delta).$$

Étape d'induction

Soit $\mathfrak{E}_n$ avec un logarithme sur $\mathbb{R}[[\mathfrak{E}_n]]^{+}_{*}$.

$$\mathfrak{E}_{n+1} = \exp \mathbb{R}[[\mathfrak{E}_n]]^{\uparrow},$$

où

$$\exp f^{\uparrow} \succcurlyeq \exp g^{\uparrow} \Leftrightarrow f \geqslant g.$$

Prendre

$$\log (c\, e^{f^{\uparrow}} (1 + \delta)) = \log c + f^{\uparrow} + \log (1 + \delta).$$

Limite inductive : $\mathbb{T} = C[[\mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_1 \cup \cdots]]$.

Exemple. $e^{e^{x}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots)} \in \mathfrak{E}_2$.

Transbases

Une transbase est un tuplet $\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ avec

TB0. $1 \prec \mathfrak{b}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{b}_n$ transmonômes.

TB1. $\mathfrak{b}_1 = \exp_l x$, avec $l \in \mathbb{Z}$.

TB2. $\mathfrak{b}_i \in \exp \mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1; \ldots; \mathfrak{b}_{i-1}]]$ pour $i > 1$.

Expansion récursive de $f \in C[[\mathfrak{b}_1; \ldots; \mathfrak{b}_n]]$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\alpha_n} f_{\alpha_n} \mathfrak{b}_n^{\alpha_n}; \\ f_{\alpha_n} &= \sum_{\alpha_{n-1}} f_{\alpha_n, \alpha_{n-1}} \mathfrak{b}_{n-1}^{\alpha_{n-1}}; \\ &\vdots \\ f_{\alpha_n, \ldots, \alpha_2} &= \sum_{\alpha_1} f_{\alpha_n, \ldots, \alpha_1} \mathfrak{b}_1^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Théorèmes des transbases incomplètes

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{B}_0$ une transbase et $f \in \mathbb{T}$ une transsérie. Alors il existe un supertransbase $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}_0$ avec $f \in \mathbb{R}[[\mathfrak{B}^C]]$.*

Exemple. $\log\left(x + e^{\frac{-x^2}{1 - x^{-1}}}\right) \in \mathbb{R}[[\log x; x; e^{x^2 + x}]]$.

Différentiation

Différentiation sur $\mathbb{L}$

Pour $\mathfrak{m} = x^{\alpha_0} \cdots (\log_l x)^{\alpha_l} \in \mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \left(\frac{\alpha_0}{x} + \cdots + \frac{\alpha_l}{x \cdots \log_l x} \right).$$

« ‘Extension par linéarité forte » à $\mathbb{L} = \mathbb{R}[[\mathfrak{L}]]$.

Différentiation sur $\mathbb{T}$

Pour $\mathfrak{m} = e^{f^{\uparrow}} \in \exp \mathbb{R}[[\mathfrak{E}_n]]^{\uparrow}$:

$$\mathfrak{m}' = (f^{\uparrow})' \mathfrak{m}$$

« Extension par linéarité forte » à $\mathbb{R}[[\mathfrak{E}_{n+1}]]$.

Mouvements supérieur et inférieur

- $f\uparrow = f \circ \exp$.
- $f\downarrow = f \circ \log$.

Partie II

Polynômes différentiels algébriques

$$\begin{aligned}
P &= \sum_d P_d \\
P_d &= \sum_{i_0+\cdots+i_r=d} P_{i_0,\ldots,i_r} f^{i_0} \cdots (f^{(r)})^{i_r} \\
\deg P &= \max\{i_0+\cdots+i_r | P_{i_0,\ldots,i_r} \neq 0\} \\
\|P\| &= \max\{i_1+\cdots+r\, i_r | P_{i_0,\ldots,i_r} \neq 0\} \\
P_{+h}(f) &= P(f+h) \\
P_{\times h}(f) &= P(f h) \\
P{\uparrow}(f{\uparrow}) &= P(f){\uparrow}
\end{aligned}$$

Parties dominantes

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_P &= \max_{\preccurlyeq} \{\mathfrak{d}_{P_{i_0,\ldots,i_r}} | P_{i_0,\ldots,i_r} \neq 0\} \\
D_P &= \sum_{i_0,\ldots,i_r} P_{i_0,\ldots,i_r,\mathfrak{d}_P}\, c^{i_0} \cdots (c^{(r)})^{i_r}
\end{aligned}$$

Théorème 2. *Pour un $k \leqslant \|P\|$, il existe un $N_P = N \in \mathbb{R}[c]\,(c')^{\mathbb{N}}$, tel que pour tout $l \geqslant k$:*

$$D_{P\uparrow_l} = N_P.$$

Exemple.

$$\begin{aligned}
P &= f\,f'' - (f')^2 \\
P\uparrow &= e^{-x}\,(f\,f'' - f\,f' - (f')^2) \\
P\uparrow\uparrow &= -e^{-e^x - x}\, f\,f' + e^{-e^x - 2x}\,(f\,f'' - (f')^2) \\
N_P &= -f\,f'
\end{aligned}$$

N_P : polynôme de Newton associé à 1.

Polygône de Newton

$$P(f)=0 \qquad (f \prec \mathfrak{v}) \tag{1}$$

Degré de Newton

- $\mathfrak{m} \prec \mathfrak{v}$ monôme dom. pot. si $N_{P_{\times \mathfrak{m}}} \notin C$.
- $\tau = c\,\mathfrak{m} \prec \mathfrak{v}$ terme dom. pot. si $N_{P_{\times \mathfrak{m}}}(c)=0$.
- Multiplicité de τ : mult. de c comme racine de $N_{P_{\times \mathfrak{m}}}$.
- Degré de Newton: deg. max. de $N_{P_{\times \mathfrak{m}}}(\mathfrak{m} \prec \mathfrak{v})$.

Types de monômes dom. pot.

Algebrique. $N_{P_{\times \mathfrak{m}}} \in \mathbb{R}[c] \backslash C$.

Différentiel. $N_{P_{\times \mathfrak{m}}} \in \mathbb{R}\,(c')^{\mathbb{N}^*}$.

Mixte. $N_{P_{\times \mathfrak{m}}} \in (\mathbb{R}[c] \backslash \mathbb{R})\,(c')^{\mathbb{N}^*}$.

M.d.p.s Algebriques et mixtes

Proposition 3. *Supposons $P_i \neq 0$ et $P_j \neq 0$. Alors il existe un égalisateur unique $\mathfrak{m} = \mathfrak{e}_{i,j}$, tel que $N_{(P_i+P_j)_{\times \mathfrak{m}}}$ ne soit pas homogène.*

M.d.p.s différentiels

Polynômes de Riccati :

$$P_i(f) = R_{P,i}(f^\dagger)\, f^i$$

Proposition 4. *Le monôme* $\mathfrak{m} \prec \mathfrak{v}$ *est un monôme dominant potentiel par rapport à*

$$P_i(f) = 0$$

si et seulement si

$$R_{P,i,\mathfrak{m}^\dagger}(f^\dagger) = 0 \qquad \left(f^\dagger \prec \frac{1}{x \log x \log \log x \cdots}\right)$$

à un degré de Newton strictement positif.

Raffinements

Changement de variables + contrainte asymptotique

$$f = \varphi + \tilde{f} \qquad (\tilde{f} \prec \tilde{\mathfrak{v}}) \tag{2}$$

transforme (1) dans

$$P_{+\varphi}(\tilde{f}) = 0 \qquad (\tilde{f} \prec \tilde{\mathfrak{v}}) \tag{3}$$

Théorème 5. *Soit* τ *le terme dominant de* φ*. Alors le degré de Newton de* (3) *vaut la multiplicité de* τ *comme terme dominant potentiel pour* (1)*.*

Équations quasi-lineares

Quasi-linéaire : de degré de Newton 1.

Théorème 6. *Toute équation quasi-linéaire admet une « solution distinguée ».*

Dénouements

Degré de Newton d n'augmente pas pour le raffinement

$$f = \tau + \tilde{f} \qquad (\tilde{f} \prec \tilde{\mathfrak{v}})$$

$\longrightarrow$ considerer raffinements comme

$$f = \psi + \tilde{f} \qquad (\tilde{f} \prec \tilde{\mathfrak{v}}),$$

avec

$$\frac{\partial P}{\partial f}(\psi) = 0 \qquad (\psi \prec \mathfrak{v}).$$

$\longrightarrow$ dénouement : raffinement (2) avec

U1. Le degré de Newton degree de (3) est d.

U2. Pour tout $\tilde{\varphi} \prec \tilde{\mathfrak{v}}$, le degré de Newton de

$$P_{\varphi + \tilde{\varphi}}(\tilde{\tilde{f}}) = 0 \qquad (\tilde{\tilde{f}} \prec \mathfrak{d}(\tilde{\varphi}))$$

est $< d$.

Structure des solutions

Théorème 7. *Si les coefficients de P sont tous purement exponentiels, alors il existe un entier $U_{d,r,w}$, tel que la profondeur logarithmique de chaque racine de P est bornée par $U_{d,r,w}$.*

Exemple

$$P = f + f f'' - (f')^2.$$

Terme dominant potentiel algébrique :

$$\tau = \frac{1}{2} x^2.$$

Terme dominant potentiel différentiel :

$$\mu e^{\lambda x}$$

avec $\lambda > 0$.

Exercise

Autres termes du développement...

Part III

Intermediate value theorem

Théorème 8. *Let P be a differential polynomial with coefficients in $\mathbb{T}$. If $\varphi < \psi$ are such that $P(\varphi)\,P(\psi) < 0$, then there exists an $f \in (\varphi, \psi)$, with $P(f) = 0$.*

Example:

$$P = f^7 + e^{e^x} f^3 f''' + \Gamma(\log \Gamma(x) + 1) = 0.$$

Proof strategy

Generalize the theorem to include φ and ψ like

- $\varphi = \xi \pm \backepsilon_{\mathbb{T}}$.
- $\varphi = \xi \pm \varpi_{\mathbb{T}}$.
- $\varphi = \xi \pm \backepsilon\,\mathfrak{m}$
- $\varphi = \xi \pm \varpi\,\mathfrak{m}$.
- $\varphi = \xi \pm \gamma$, where $\gamma = \frac{1}{x \log x \log \log x \cdots}$.

Behaviour near zero and infinity

Lemme 9. *$P(\pm f)$ has constant sign for sufficiently large $f \in \mathbb{T}$.*

Démonstration. Rewrite P in $f, f^{\dagger}, f^{\dagger\dagger}, \ldots$ $\square$

Lemme 10. *$P(\pm\varepsilon)$ has constant sign for sufficiently small $f \in \mathbb{T}$.*

Behaviour near constants

- $\sigma_P(f) = \operatorname{sign} P(f)$.
- $f \lll g \Leftrightarrow \log|f| \prec \log|g|$.
- $N_P = Q(c)\,(c')^{\nu}$ and P purely exponential.
- μ multiplicity of c as a root of Q.

Lemme 11. *For all $0 < \varepsilon \prec 1$ with $\varepsilon \lll e^x$, the signs of $P(c - \varepsilon)$ and $P(c + \varepsilon)$ are independent of ε and given by*

$$(-1)^{\mu}\,\sigma_P(c - \backepsilon) = (-1)^{\nu}\,\sigma_P(c + \backepsilon) = \sigma_{Q^{(\mu)}}(c).$$

Lemme 12. *For P homogeneous of degree i:*

$$\sigma_P(\backepsilon) = \sigma_P(\varepsilon) = \sigma_{R_{P,i}(\varepsilon^{\dagger})} = \sigma_{R_{P,i}(-\gamma)}$$

for all $0 < \varepsilon \prec 1$ with $\varepsilon \lll e^x$.

Behaviour before & after constants

Lemme 13. *For all* $0 < f \succ 1$ *with* $f \prec\!\!\prec e^x$*, the signs of* $P(-f)$ *and* $P(f)$ *are independent of* f *and given by*

$$(-1)^{\deg Q + \nu} \sigma_P(-\mathfrak{m}) = \sigma_P(\mathfrak{m}) = \operatorname{sign} Q_{\deg Q}.$$

Lemme 14. *For* P *homogeneous of degree* i*:*

$$\sigma_P(\mathfrak{m}) = \sigma_P(f) = \sigma_{R_{P,i}}(f^\dagger) = \sigma_{R_{P,i}(\gamma)},$$

for all $0 < f \succ 1$ *with* $f \prec\!\!\prec e^x$*.*

Final proof

- Reduction to intervals of the form $(\xi, \xi + \backepsilon\mathfrak{v})$ or $(\xi + \gamma, \xi + \backepsilon\mathfrak{v})$.
- Triple induction over order of P, Newton degree of (1) and maximal length of chain of "privileged refinements".
- Reduce interval using lemmas and by looking where the sign change occurs.

What next?

- Complex transseries
  - At least d complex transseries solutions.
  - Linear differential operators factorize.
  - Case separations & corresponding regions.
  - Analysable functions.
- Differential-difference equations
  - OK for postcompositions with exponentiality 0 (like $z+1, q\,z, z^N$).
  - Transseries of positive strength (PhD. Michael Schmeling).
  - Nested transseries.
- Model theory.
- Algorithms.
- And much and much more...