Sur certains produits infinis

par Joris van der Hoeven

LIX
École Polytechnique
91128, Palaiseau
France

Email : vdhoeven@lix.polytechnique.fr

Octobre 1994

1 Introduction

Ce papier est essentiellement la troisième chapitre de mon D.E.A. [VdH 93]. On étudie l'asymptotique des produits de la forme

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2^k}/a}$$

Cette fonction vérifie l'équation mahlérienne suivante :

$$f(z^2) = (1 - z/a) f(z), \quad \text{où } a \neq 0 \text{ et } f(0) = 1,$$

L'étude de cette équation est importante, car toute suite mahlérienne est produit de convolution de suites mahlériennes relevant de cette équation et d'une suite régulière (voir [Dum 93]). On montre que le comportement du n-ième coefficient de Taylor $f_n = [z^n] f(z)$ dépend essentiellement du module de a. Si le module de a est inférieur à 1, l'analyse des f_n est facile ; $f(z^2)$ étant analytique pour $|z| < \sqrt{a}$, on a :

$$f_n \sim \frac{f(a^2)}{a^n}.$$

En revanche le cas $|a| \geq 1$ donne lieu à des comportements très divers. Dans la quatrième section on montre que pour toute “bonne” fonction h, avec $x \prec h(x) \preceq x \lg x$, il existe un a de module 1, tel que $\lg |\hat{f}_n| \asymp h(\lg n)$; ici $\lg x = \log_2 x$ et $\hat{f}_n = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$. En fait, le comportement des f_n dépend essentiellement du développement en binaire de $\arg a / 2\pi$. Enfin, pour $|a| \geq 2$, les f_n restent bornées, mais se comportent de façon extrêmement chaotique. Il y a donc peu de chance que le comportement des f_n rentre dans une échelle asymptotique habituelle.

2 Encadrements de lg $\hat{f}_n$

Fixons d'abord quelques notations. On rappelle que l'on note $\lg z = \log_2 z$ et $\hat{f}_n = \max_{1\le i\le n} |f_i|$. Pour z et z' de module 1, on note par $\mathrm{d}(z, z')$ leur distance sur le cercle unité divisé par 2π.

Pour tout $0 < r < 1$ l'inégalité triangulaire nous donne alors :

$$|1 - rz| \le |1 - z| + 1 - r \le 2\pi \mathrm{d}(1, z) + 1 - r.$$

En utilisant la concavité de lg on obtient alors :

$$-\lg |1 - rz| \ge \min(-\lg\ \mathrm{d}(1, z), -\lg(1 - r)) - 4. \tag{1}$$

Puis on a pour $z = e^{2\pi i\alpha}$ et $|\alpha| \le 1/2$:

$$|1 - rz|^2 - (2\mathrm{d}(1, z))^2 =$$

$$1 + r^2 - 2r\cos(2\pi\alpha) - 4\alpha^2.$$

On vérifie aisément que cette expression est toujours positive. On obtient donc :

$$|1 - rz| \ge 2\mathrm{d}(1, z) \Rightarrow$$

$$-\lg |1 - rz| \le \min(-\lg\ \mathrm{d}(1, z), -\lg(1 - r)). \tag{2}$$

Dans un premier temps on va essayer de minorer $\lg |f(ra)|$, pour $r = 1/2^{1/2^n}$:

$$\lg |f(ra)| = \sum_{k=0}^{\infty} -\lg \left|1 - \frac{a^{2^k-1}}{2^{2^{k-n}}}\right| \ge \sum_{k=0}^{n-1} -\lg \left|1 - \frac{a^{2^k-1}}{2^{2^{k-n}}}\right|.$$

Puis, d'après l'inégalité (1) :

$$\lg |f(ra)| \ge \sum_{k=0}^{n-1} \min\left\{-\lg\ \mathrm{d}(1, a^{2^k-1}), -\lg\left(1 - \frac{1}{2^{2^{k-n}}}\right)\right\} - 4n.$$

Or, comme

$$\begin{aligned}
\lg\left(1 - \frac{1}{2^{2^{-x}}}\right) &= \lg\left(1 - e^{-(\ln 2)2^{-x}}\right) \\
&= \lg\left((\ln 2)2^{-x} + O(2^{-2x})\right) \\
&= \lg \ln 2 - x + O(2^{-x}),
\end{aligned}$$

il existe des constantes C_1 et C_2 tel que pour $k < n$:

$$C_1 + k - n < \lg\left(1 - \frac{1}{2^{2^{k-n}}}\right) < C_2 + k - n, \tag{3}$$

d'où on tire enfin :

$$\text{(4)} \qquad \lg |f(ra)| \geq A_n + O(n), \text{ où :}$$

$$A_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \min(\lfloor -\lg \text{ d}(a, a^{2^k}) \rfloor, n-k).$$

Essayons de comprendre intuitivement ce que représente A_n. Si on développe $\arg a/2\pi$ en binaire, alors la quantité $\alpha_n \stackrel{\text{déf}}{=} \lfloor -\lg \text{ d}(a, a^{2^n}) \rfloor$, que l'on appelle le n-ième autocorrélateur de a, mesure plus ou moins le nombre de chiffres en commun après la virgule entre ce développement et le même développement décalé de n chiffres vers la gauche (en convenant que l'on tient compte des irrégularités dues à $1,000\cdots \approx 0,111\cdots$). On mesure donc quelque chose comme le taux de réappararition des premiers chiffres de $\arg a/2\pi$ dans son développement binaire. Si ensuite on met dans un diagramme le nombre $d = \alpha_k$ en fonction de k, alors A_n représente le nombre de cases du diagramme en dessous de la ligne d'équation $d = n - k$ ce qui revient à “tronquer” le diagramme. On appelle A_n la série d'autocorrélation associée à a. Dans les figures 1.a et 1.b on montre les diagrammes associés à différentes valeurs de a.

Maintenant que l'on a donné un sens physique aux A_n, on peut affirmer que si $\arg a/2\pi$ est rationnel, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, donc $A_n \sim cn$ ou $A_n \sim cn^2$. Dans ce cas on peut obtenir des estimations précises des f_n par la méthode de col (voir [Dum 93]). Sinon, pour que la formule (4) nous soit utile, il faut que $A_n \succ n$. C.à.d. il faut qu'il y ait suffisamment d'autocorrélation (ce qui par exemple n'est pas le cas si $a = -1$).

Dans un deuxième temps, on cherche à majorer $\lg |f(z)|$, pour $|z| = r$. Soit donc b de module 1. On a :

$$\lg |f(rb)| = \sum_{k=0}^{\infty} -\lg \left| 1 - \frac{b^{2^k}}{a\, 2^{2^{k-n}}} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} -\lg \left| 1 - \frac{b^{2^k}}{a\, 2^{2^{k-n}}} \right| + M, \text{ avec}$$

$$M = \sup_{|z| \leq 1/2} \lg |f(z)|.$$

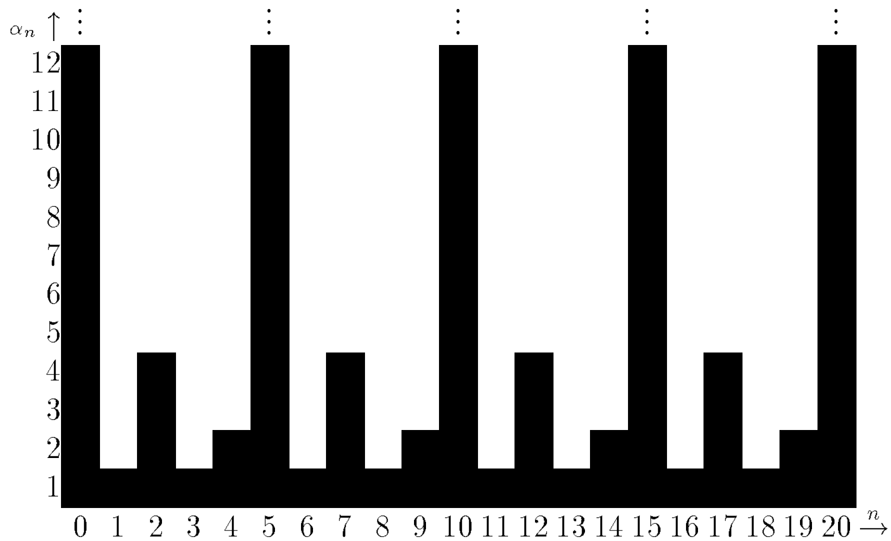
En utilisant (2) on obtient ensuite :

$$\lg |f(rb)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \min \left\{ -\lg \text{ d}(a, b^{2^k}), -\lg \left(1 - \frac{1}{2^{2^{k-n}}} \right) \right\} + M$$

et finalement, en utilisant (3) :

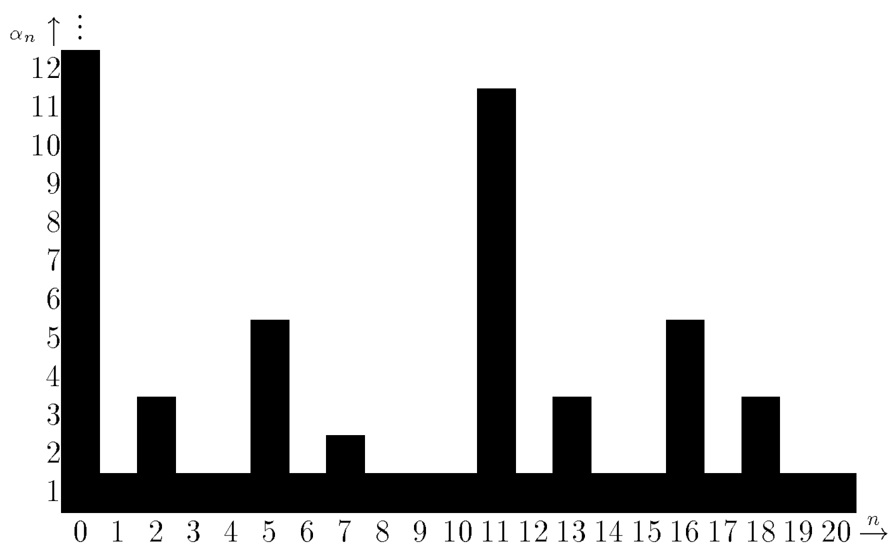
$$\text{(5)} \qquad \lg |f(rb)| \geq B_{b,n} + O(n), \text{ où :}$$

$$B_{b,n} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \min(\lfloor -\lg \text{ d}(a, b^{2^k}) \rfloor, n-k).$$



$$\left(\frac{\arg a}{2\pi}\right)_2 = 0,\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \cdots$$

Figure 1.a : Comportement de α_n, pour a racine d'unité et où A_n a un comportement en Cn^2.



$$\left(\frac{\arg a}{2\pi}\right)_2 = 0,\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \cdots$$

Figure 1.b : Comportement de α_n, pour un a tel que A_n a un comportement en $Cn \lg n$.

Intuitivement $\beta_n \overset{\text{déf}}{=} \lfloor -\lg \mathrm{d}(a, b^{2^n}) \rfloor$ mesure le nombre de chiffres en commun entre le développement en binaire de $\arg a/2\pi$ et $\arg b/2\pi$, décalé de n chiffres vers la gauche. Ceci implique que quand ce nombre est grand, alors $\beta_{n+\delta}$ est voisin de α_δ. Dans la section suivante, on utilisera cette remarque pour montrer que la seconde série d'autocorrélation $B_n \overset{\text{déf}}{=} \sup_{|b|=1} B_{b,n} \geq A_n$ est asymptotiquement équivalente à A_n.

Pour terminer, montrons maintenant comment obtenir un encadrement de $\lg \hat{f}_n$ à l'aide de (4) et (5).

Premièrement soit C_r le cercle de centre 0 et de rayon $r = 1/2^{1/n}$:

$$\begin{aligned} |f_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(rz)|}{r^{n+1}} dz \\ &\leq 2^{B_{\lceil \lg n \rceil} + O(\lg n)} \cdot \frac{1}{r^n} \\ &= 2^{B_{\lceil \lg n \rceil} + O(\lg n)}. \end{aligned}$$

On en déduit la première inégalité pour $\lg \hat{f}_n$ en utilisant le fait que B_n est croissant :

$$\lg |f_n| \leq \lg \hat{f}_n \leq B_{\lceil \lg n \rceil} + O(\lg n). \tag{6}$$

Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, on supposera que :

- $A_n \sim B_n$,
- $n = o(A_n)$.
- $A_{n'} \leq A_n + M(n' - n) \lg n'$ pour un certain M et tout $n' > n \geq 1$.

Dans la section suivante on donne des conditions impliquant ces hypothèses.

D'après l'inégalité (4), on a pour $r = 1/2^{1/n}$:

$$2^{A_{\lfloor \lg n \rfloor} + O(\lg n)} \leq |f(ra)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{2^{k/n}} = \hat{f}(r).$$

On en déduit en particulier que $\lg n = o(\lg \hat{f}_n)$ (sinon $\hat{f}(r)$ est à croissance polynomiale en n contrairement à $2^{A_{\lfloor \lg n \rfloor}}$. Posons maintenant :

$$\varphi(n) = \sup_{k \geq n} \frac{\lg \hat{f}_k}{A_{\lfloor \lg k \rfloor}} A_{\lfloor \lg n \rfloor}.$$

On a clairement $\lg n \prec \lg \hat{f}_n \leq \varphi(n) \prec A_{\lfloor \lg n \rfloor}$. De plus, si n est suffisamment grand, on a pour tout $k \geq 4n\varphi(n)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &\leq \sup_{l \geq k} \frac{\lg \hat{f}_l}{A_{\lfloor \lg l \rfloor}} A_{\lfloor \lg k \rfloor} \\
&\leq \sup_{l \geq n} \frac{\lg \hat{f}_l}{A_{\lfloor \lg l \rfloor}} (A_{\lfloor \lg n \rfloor} + M(\lg \frac{k}{n} + 1) \lg \lg k) \\
&\leq \varphi(n) + 2M(\lg \frac{k}{n} + 1) \lg \lg k \\
&\leq \frac{k}{4n} + 3M \lg \frac{k}{n} \lg(\lg \frac{k}{n} + \lg n) \\
&\leq \frac{k}{4n} + 3M \lg \frac{k}{n} \lg(\lg \frac{k}{n} + \frac{k}{n}) \\
&\leq \frac{k}{2n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor}^{\infty} \hat{f}_k 2^{-\frac{k}{n}} &= \sum_{k=\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor}^{\infty} 2^{\varphi(k) - \frac{k}{n}} \\
&\leq \sum_{k=\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2n}} \\
&\leq \frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{2n}}} \\
&= O(n).
\end{aligned}$$

On a également :

$$A_{\lfloor \lg 4n\varphi(n) \rfloor} - A_{\lfloor \lg n \rfloor} \leq M \lceil \lg 4\varphi(n) \rceil \lg \lfloor \lg 4n\varphi(n) \rfloor = O(\lg n).$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned}
2^{A_{\lfloor \lg(4n\varphi(n)) \rfloor} + O(\lg n)} &\leq 2^{A_{\lfloor \lg n \rfloor}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k 2^{\frac{k}{n}} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor - 1} \hat{f}_k 2^{\frac{k}{n}} + \sum_{k=\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor}^{\infty} \hat{f}_k 2^{\frac{k}{n}} \\
&\leq \lfloor 4n\varphi(n) \rfloor \hat{f}_{\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor} 2^{4\varphi(n)} + O(n).
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}
A_{\lfloor \lg 4n\varphi(n) \rfloor} + O(\lg n) &\leq \lg \hat{f}_{\lfloor 4n\varphi(n) \rfloor} + 4\varphi(n) \\
&\leq 5\varphi(4n\varphi(n)).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$(7) \qquad \lg \hat{f}_n \asymp A_{\lfloor \lg n \rfloor}.$$

3 Sur les liens entre les deux séries d'autocorrélation

Dans toute cette section nous supposons que les conditions (C) suivantes sont vérifiés :

- $n = o(A_n)$.
- $\alpha_n = O(n)$.
- Pour tout $\lambda < 1$, il existe un N tel que

$$(8) \qquad \forall n' \geq n \geq N \quad \frac{A_{n'}}{A_n} \geq \lambda \frac{n'}{n}$$

Intuitivement ceci veut dire qu'à la fois il y a suffisamment et pas trop d'autocorrélation et que A_n croît de façon "régulière". La deuxième condition entraîne l'existence d'une constante $C \geq 1$, telle que $\alpha_n \leq Cn$, pour tout $n > 0$. Fixons cette constante une fois pour toutes. Le but de cette section sera alors de d'établir le lemme 1 et le théorème 1. Combinant ces résultats avec ceux de la section précédente on obtient alors un encadrement de $\lg \hat{f}_n$, lorsque les conditions (C) sont vérifiées.

Remarquons tout d'abord que pour $0 < \delta < \beta_n$ et $\beta_{n+\delta} \leq \beta_n - \delta - 2$, (où on peut remplacer la condition $\beta_{n+\delta} \leq \beta_n - \delta - 2$ par $\alpha_\delta \leq \beta_n - \delta - 2$, menant de façon semblable au même résultat) on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(a, b^{2^n}) &\leq 2^{-\beta_n} \Rightarrow \\ \mathrm{d}(a^{2^\delta}, b^{2^{n+\delta}}) &\leq 2^{-(\beta_n - \delta)} \Rightarrow \\ |\mathrm{d}(a, b^{2^{n+\delta}}) - \mathrm{d}(a, a^{2^\delta})| &\leq 2^{-(\beta_n - \delta)} \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{d}(a, b^{2^{n+\delta}}) \geq 2^{-(n-\delta-1)}$,

$$|\lg\ \mathrm{d}(a, b^{2^{n+\delta}}) - \lg\ \mathrm{d}(a, a^{2^\delta})| \leq 1 \Rightarrow$$

$$(9) \qquad |\beta_{n+\delta} - \alpha_\delta| \leq 1.$$

Nous sommes maintenant en mesure de pouvoir démontrer le :

Lemme 1. *Avec les conditions (C), il existe M tel que pour tout $n' > n \geq 1$, on a :*

$$A_{n'} - A_n \leq M(n' - n) \lg n'.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n'-n$; il suffit de trouver un M, tel que $A_{n+1}-A_n \leq M\lg(n+1)$, pour tout $n \geq 1$. Or $A_{n+1}-A_n = \mathrm{Card}\{k \leq n | \alpha_k > n-k\}$. Soient alors $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_j \leq n$ les nombres tels que $\alpha_{n_i} > n-n_i$. Pour $0 \leq i \leq j$ et $\delta \leq (n-n_i-2)/(C+1)$, on a :

$$\alpha_\delta \leq C\delta \leq (n-n_i-2)(1-\frac{1}{C+1}) \leq n-n_i-2-\delta \leq \alpha_{n_i}-\delta-2.$$

Donc d'après (9), on a $\alpha_{n_i+\delta} \leq \alpha_\delta + 1$, d'où $\alpha_{n_i+\delta} \leq n-n_i-\delta$ et

$$n_{i+1}-n_i \geq \frac{n-n_i-2}{C+1}.$$

Par récurrence, il s'en suit que :

$$n_i \geq (1-\left(\tfrac{C}{C+1}\right)^i)(n-2).$$

En particulier :

$$n-3 \leq n_{j-3} \leq (1-\left(\tfrac{C}{C+1}\right)^{j-3})(n-2), \text{ d'où}$$

$$j-3 \leq \frac{\lg(n-2)}{\lg\left(\frac{C+1}{C}\right)}.$$

Alors $A_{n+1}-A_n = j \leq M'\lg(n+1)$, pour $M' = 2/\lg((C+1)/C)$ et tout n à partir d'un certain rang N. Pour finir, il suffit de poser

$$M = \max\left(M', \frac{A_2-A_1}{\lg 2}, \cdots, \frac{A_N-A_{N-1}}{\lg N}\right). \qquad \heartsuit$$

Lemme 2. *Soit b de module 1. Alors :*

$$B_{b,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \min(\beta_k, nC) + O(n),$$

le terme d'erreur étant uniforme en b. En particulier dans le cas $\beta = \alpha$, on a :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + O(n).$$

Démonstration. D'abord, posons $C' = 3C^2+11C+5$. Ensuite raisonnons par récurrence. Plus précisément, supposons par récurrence que l'on ait l'inégalité suivante pour tout $n' < n$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k - A_n \leq C'n'. \tag{10}$$

Alors montrons que l'on a l'inégalité pour $n' = n$ et donc pour tout n' par récurrence. Ceci nous donne le cas particulier du lemme. Par ailleurs, toujours sous l'hypothèse de récurrence, on montrera également que :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \min(\beta_k, Cn) - B_{b,n} \leq C'n.$$

Ceci achèvera bien la démonstration du lemme.

Fixons donc b de module 1. Comme pour $n = 0$ il n'y a rien à démontrer, on peut supposer que $n > 0$. Soient $0 \leq n_0 < n_1 < \cdots < n_j < n_{j+1} = n$ les nombres définis par

$$\begin{cases} n_0 = \min\{k \geq 0 \quad |\beta_k > n-k\} \\ n_1 = \min\{k > n_0 \quad |\beta_k > n-k\} \\ n_i = \min\{k > n_{i-1} | \beta_k > \beta_{n_{i-1}} - (k - n_{i-1}) - 2\} \text{ , pour } 2 \leq i \leq j. \end{cases}$$

Alors pour $\delta \leq (n - n_0 - 2)/(C+1)$, on trouve $\alpha_\delta \leq n - n_0 - 2 - \delta \leq \beta_{n_0} - \delta - 2$. Puis en utilisant (9), on obtient $n_1 - n_0 \geq (n - n_0 - 2)/(C+1)$. Ceci nous donne enfin :

$$n_1 \geq \frac{n-2}{C+1}.$$

Soit maintenant $1 \leq i \leq j-1$. Pour $\delta < (\beta_{n_i} - 3)/(C+1)$, on trouve $\alpha_\delta \leq \beta_{n_i} - 3 - \delta$ et en utilisant (9),

$$n_i - n_{i-1} \geq (\beta_{n_{i-1}} - 3)/(C+1).$$

Puis encore à cause de (9), on a $|\beta_k - \alpha_{k-n_{i-1}}| \leq 1$, pour $n_{i-1} < k < n_i$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \alpha_{k-n_{i-1}} + n_i - n_{i-1} &\geq \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \beta_k \\ &\geq \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \min(\beta_k, n-k) \\ &\geq \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \min(\beta_k, n_i-k) \\ &\geq \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \min(\alpha_{k-n_{i-1}}, n_i-k) - (n_i - n_{i-1}) \\ &= A_{n_i-n_{i-1}} - 2(n_i - n_{i-1}). \end{aligned}$$

Or, comme $n_i - n_{i-1} < n$, on a d'après (10) :

$$\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \alpha_{k-n_{i-1}} - A_{n_i-n_{i-1}} \leq C'(n_i - n_{i-1}). \tag{11}$$

Il s'en suit que :

$$\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \beta_k - \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i-1} \min(\beta_k, n-k) \leq (C'+3)(n_i - n_{i-1}).$$

Par ailleurs on avait montré $\beta_{n_i} - 3 < (C+1)(n_{i+1} - n_i)$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} \beta_{n_i} &\leq \beta_{n_0} + \beta_{n_j} + (C+1)\left(\sum_{i=2}^{j-1} n_{i+1} - n_i\right) + 3(j+1) \\
&\leq \beta_{n_0} + \beta_{n_j} + (C+4)n \Rightarrow \\
\sum_{i=0}^{j} \min(\beta_{n_i}, Cn) &\leq (3C+4)n.
\end{aligned}$$

En rassemblant tous les morceaux, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \min(\beta_k, Cn) - B_{b,n} &= \sum_{i=0}^{j} \min(\beta_{n_i}, Cn) - (n - n_i) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}-1} \min(\beta_k, Cn) - \min(\beta_k, n-k) \\
&\leq \sum_{i=0}^{j} \min(\beta_{n_i}, Cn) + \sum_{i=1}^{j} (C'+3)(n_{i+1} - n_i) \\
&\leq (3C+4)n + (C'+3)(n - n_1) \\
&\leq (3C+4)n + (C'+3)(1 - \frac{1}{C+1}))n + \frac{2}{C+1} \\
&\leq C'n.
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $b = a$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k - A_n \sum_{k=0}^{n-1} \min(\alpha_k, Cn) - A_n - Cn \leq C'n$$

Ceci est la relation (10), pour $n' = n$. ♡

Lemme 3. *Soit b de module 1. Il existe une suite $\{p_i\}$, avec des termes potentiellement infinis, telle que*

$$B_{b,n} = A_{p_0} + \cdots + A_{p_j} + A_r + O(n),$$

pour tout $n = p_0 + \cdots + p_j + r$, avec $1 \leq r \leq p_{j+1}$. De plus le terme d'erreur est uniforme en b.

Démonstration. Soit la suite $n_0 = 0 < n_1 < \cdots$ telle que pour tout $i \geq 1$, n_i soit le plus petit nombre plus grand que n_{i-1} et tel que β_{n_i} soit plus grand que $\beta_{n_{i-1}} - (n_i - n_{i-1})$. Montrons que la suite $\{p_i\}$ définie par $p_i = n_{i+1} - n_i$ convient. Reprenons les notations du lemme précédent. D'après (10), on a :

$$\begin{aligned} & A_{p_0} + A_{p_1} + \cdots + A_{p_j} + A_r = \\ = \ & \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{p_i-1} \alpha_k + \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k + O(n) \\ = \ & \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}-1} \alpha_{k-n_i} + \sum_{k=n_j+1}^{n-1} \alpha_{k-n_j} + O(n). \end{aligned}$$

Puis, remarquons que pour les mêmes raisons que dans la démonstration du lemme précédent, on a :

$$\beta_{n_i} - 3 \leq (C+1)(n_{i+1} - n_i) \text{ , d'où}$$
$$\sum_{i=0}^{j} \min(\beta_{n_i}, Cn) = O(n).$$

D'autre part, d'après (9), on a $|\beta_k - \alpha_{k-n_i}| \leq 1$, pour $n_i < k < n_{i+1}$ ou $n_j < k < n$. On en déduit :

$$\begin{aligned} B_{b,n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \min(\beta_k, Cn) + O(n) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \min(\beta_k, Cn) + \sum_{k=n_j}^{n-1} \min(\beta_k, Cn) + O(n) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \min(\alpha_{k-n_i}, Cn) + \sum_{k=n_j}^{n-1} \min(\alpha_{k-n_j}, Cn) + \\ & \quad \sum_{i=0}^{j} \min(\beta_{n_i}, Cn) + O(n) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}-1} \alpha_{k-n_i} + \sum_{k=n_j+1}^{n-1} \alpha_{k-n_j} + O(n). \end{aligned}$$

Finalement on remarque que tous les termes d'erreur utilisés sont uniformes en b, d'où le lemme. ♡

Démontrons maintenant le théorème principal de cette section :

Théorème 1. *Lorsque les conditions (C) sont vérifiées, on a $A_n \sim B_n$.*

Démonstration. Supposons que l'on ait (8) pour certains λ et N. D'après le lemme 3 on peut écrire pour tout b de module 1 :

$$B_{b,n} = A_{p_0} + \cdots + A_{p_j} + O(n),$$

pour certains nombres $p_0, \cdots, p_j$ de somme n. Alors :

$$B_{b,n} = \sum_{i, p_i < N} A_{p_i} + \sum_{i, p_i \geq N} A_{p_i} + O(n).$$

Or

$$\sum_{i, p_i < N} A_{p_i} \leq n \max_{0<k<N} \frac{A_k}{k} = O(n)$$

et d'autre part :

$$\sum_{i, p_i \geq N} \frac{A_{p_i}}{A_n} \leq \sum_{i, p_i \geq N} \frac{p_i}{\lambda n} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

D'où :

$$\frac{B_{b,n}}{A_n} \leq \frac{1}{\lambda} + O(\frac{n}{A_n}) = \frac{1}{\lambda} + o(1).$$

Le terme reste étant uniforme en b, pour tout $\lambda' < \lambda$, on a donc à partir d'un certain rang :

$$B_n \leq \frac{1}{\lambda'} A_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $\lambda < 1$, on a donc $A_n \sim B_n$. ♡

Remarque. Nous pensons que l'on a même la chose suivante : Lorsque les deux premières conditions de (C) sont vérifiées alors il y a équivalence entre la trosième proposition et la proposition $A_n \sim B_n$.

4 Sur la diversité de comportements possibles de lg $\hat{f}_n$

On dira qu'une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est régulière, si :

- $\bar{h}(x) = h(x)/x$ est croissante et tend vers l'infini.
- $\exists M \, \forall x' > x \quad \bar{h}(x') - \bar{h}(x) \leq M \lg \frac{x'}{x}$.

Remarquons que toute fonction régulière h vérifie nécessairement $x \prec h(x) \preceq x \lg x$. Si h est dérivable, alors la deuxième condition est notamment vérifiée si $\bar{h}'(x) \preceq 1/x$. En particulier toute fonction dérivable h telle que

$$\frac{1}{x \lg x} \preceq \bar{h}'(x) \preceq \frac{1}{x}$$

est régulière ; Ceci nous permet d'associer injectivement une fonction régulière à chaque fonction continue asymptotiquement comprise entre $1/(x \lg x)$ et $1/x$.

Montrons maintenant comment on peut construire des a de module 1, tels que $\lg \hat{f}_n$ ait le même comportement que $h(\lg n)$, à un facteur constant près, étant donnée une bonne fonction h. Fixons d'abord quelques notations. Pour a de module 1, on pose

$$\frac{\arg a}{2\pi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \quad \text{avec } a_i \in \{0, 1\}.$$

Sinon pour a' de module 1, on définit A'_n, α'_n, etc. de la même façon que pour a. Démontrons tout d'abord quelques lemmes :

Lemme 4. *Soient a et a' de module 1 et N tel que $d(a, a') \leq 2^{-N}$. Alors :*

- *(a)* $|\alpha_k - \alpha'_k| \leq 1$, *pour tout k, tel que $\alpha_k \leq N - k - 3$.*
- *(b)* $|A_n - A'_n| \leq 3n$, *pour tout $n \leq N$.*
- *(c)* *Si $d(a, 1) \geq 2^{-(N-1)}$, alors $|\lg d(a, 1) - \lg d(a', 1)| \leq 1$.*

Démonstration. Pour tout k, on a :

$$|\mathrm{d}(a, a^{2^k}) - \mathrm{d}(a', a'^{2^k})| \leq \mathrm{d}(a, a') + \mathrm{d}(a^{2^k}, a'^{2^k}) \leq 2^{k+1-N}.$$

En particulier, si $\alpha_k \leq N - k - 3$ (et de même si $\alpha'_k \leq N - k - 3$), alors :

$$\begin{aligned} & -\lg \mathrm{d}(a, a^{2^k}) \leq \alpha_k + 1 \leq N - (k+2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{d}(a, a^{2^k}) \geq 2^{k+2-N} \\ \Rightarrow \quad & |\lg \mathrm{d}(a, a^{2^k}) - \lg \mathrm{d}(a', a'^{2^k})| \leq 1 \\ \Rightarrow \quad & |\alpha_k - \alpha'_k| \leq 1. \end{aligned}$$

Il s'en suit que pour $n \leq N$:

$$|A_n - A'_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\min(\alpha_k, n-k) - \min(\alpha'_k, n-k)| \leq 3n.$$

Finalement (c) est trivial. ♡

Maintenant soit n un entier. On dira que (a, n) vérifie la propriété (P) ssi :

- $\forall k \geq n - (\alpha_n + 3) \quad a_k = 0.$
- $\forall 1 \leq k \leq n - (\alpha_n + 3) \quad \alpha_k \leq n - k - 3.$
- $n \geq (\alpha_n + 3)^2.$

Si (a, n) vérifie la propriété (P), définissons pour tout entier $p \geq 2$ le nombre $a' = \tau_{p,n}(a)$ de module 1 par $a'_k = a_{((k-1) \bmod n)+1}$, pour $k < pn$ et $a'_k = 0$, sinon. Calculons maintenant les α'_k, définis par cette transformation :

Lemme 5. *Si la paire (a,n) vérifie la propriété (P), alors les autocorrélateurs de $a' = \tau_{p,n}(a)$ vérifient les relations suivantes :*

(a)	*Pour $k < n - \alpha_n - 3$,*	*on a $\lvert\alpha'_k - \alpha_k\rvert \leq 1$.*
(b)	*Pour $n - \alpha_n - 3 \leq k < n$,*	*on a $\alpha'_k \leq \alpha_n + 2$.*
(c)	*Pour $n \leq k < pk - \alpha_n - 3, n \nmid k$,*	*on a $\lvert\alpha'_k - \alpha'_{k \bmod n}\rvert \leq 1$.*
(d)	*Pour $n \leq k < pk - \alpha_n - 3, n \mid k$,*	*on a $\lvert\alpha'_k - (pn-k)\rvert \leq \alpha_n + 1$.*
(e)	*Pour $k \geq pn - \alpha_n - 3$,*	*on a $\lvert\alpha'_k - \alpha_n\rvert \leq 1$.*

Démonstration. (a) découle directement du lemme précédent.

Puis pour $n - \alpha_n - 3 \leq k \leq n$, soit a'' de module 1 tel que $\arg a'' = \arg a/2^{n-k}$. Alors :

$$|\mathrm{d}(a', a'^{2^k}) - \mathrm{d}(a, a'')| \leq \mathrm{d}(a, a') + \mathrm{d}(a'', a'^{2^k}) \leq 2^{-(n-1)}.$$

Comme par ailleurs $\mathrm{d}(a, a'') = (1 - 2^{k-n})\mathrm{d}(a, 1) \geq 2^{-(\alpha_n+1)} \geq 2^{-(n-2)}$, on a $\mathrm{d}(a', a'^{2^k}) \geq 2^{-(\alpha_n+2)}$, d'où (b).

Ensuite, on a $\alpha_n = \lfloor -\lg \mathrm{d}(a,1) \rfloor = \lfloor -\lg(\arg a/2\pi) \rfloor$. On en déduit que $a_k = 1$, pour un certain $k \leq \alpha_n + 1$. Pour $n \leq k < pn - \alpha_n - 3$, les développements en binaire de $\arg a'^{2^k}/2\pi$ et $\arg a'^{2^{k \bmod n}}/2\pi$ ont donc au moins $pn - k$ et au plus $pn + \alpha_n - k$ chiffres en commun au début. On en déduit :

$$2^{-(pn+\alpha_n+1-k)} \leq \mathrm{d}(a'^{2^k}, a'^{2^{k \bmod n}}) \leq 2^{-(pn-k)}.$$

Or dans le cas où $n \mid k$, ceci nous donne (d).

Dans l'autre cas, en utilisant

$$\begin{cases} \alpha'_{k \bmod n} \leq n - (k \bmod n) - 2 \leq pn - k - 2, & \text{si } k \bmod n < n - \alpha_n - 3 \\ \alpha'_{k \bmod n} \leq \quad \alpha_n + 1 \quad \leq pn - k - 2, & \text{sinon,} \end{cases}$$

on trouve (c).

Finalement, pour $k \geq pn - \alpha_n - 3$, on trouve :

$$|\mathrm{d}(a', a'^{2^k}) - \mathrm{d}(a, a^{2^n})| = |\mathrm{d}(a', 1) - \mathrm{d}(a, 1)| \leq 2^{-n}.$$

Or $\mathrm{d}(a, 1) \geq 2^{-(\alpha_n+1)} \geq 2^{-(n-1)}$, d'où (e). ♡

Corollaire 1. *La paire (a', n') vérifie la propriété (P), pour $n' \geq pn + \alpha_n + 4$.*

Démonstration. On a $|\alpha_n - \alpha'_{n'}| = |\lfloor -\lg(a,1) \rfloor - \lfloor -\lg(a',1) \rfloor| \leq 1$, d'après le lemme 4(c). Ensuite toutes les conditions se vérifient trivialement. ♡

Corollaire 2. *On a $\alpha'_k \leq (p+1)k$, pour tout $k \geq n$.* ♡

Corollaire 3. *On a* $\left|A'_{n'} - \left(qA_n + A_r + \frac{q^2}{2}\right)\right| \leq 10n'$, *pour* $n' = qn + r$, *où* $1 \leq q \leq p$ *et* $0 \leq r \leq n$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
A_n &= n + \sum_{k=1}^{n-\alpha_n-4} \alpha_k + \sum_{k=n-\alpha_n-3}^{n-1} \min(\alpha_k, n-k), \\
A'_{n'} &= \sum_{q'=0}^{q-1} \left\{ \sum_{k=0}^{0} + \sum_{k=1}^{n-\alpha-4} + \sum_{k=\alpha_n-3}^{n-1} \right\} \min(\alpha'_{q'n+k}, n'-k) + \sum_{k=qn}^{qn+r-1} \min(\alpha'_n, n'-k).
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n-\alpha_n-3}^{n-1} \min(\alpha_k, n-k) &\leq (\alpha_n+3)^2, \\
\left| \sum_{q'=0}^{q-1} \min(\alpha'_{q'n}, n'-k) - \frac{1}{2}q(r + \frac{q+1}{2}n) \right| &\leq q(\alpha_n+3), \\
\left| \sum_{q'=0}^{q-1} \sum_{k=1}^{n-\alpha_n-4} \alpha'_{q'n+k} - q \sum_{k=1}^{n-\alpha_n-4} \alpha_k \right| &\leq 2qn, \\
\sum_{q'=0}^{q-1} \sum_{k=n-\alpha_n-3}^{n-1} \min(\alpha'_{q'n+k}, n'-k) &\leq q(\alpha_n+3)^2, \\
\left| \sum_{k=qn}^{n'-1} \min(\alpha'_k, n'-k) - \sum_{k=0}^{r-1} \min(\alpha'_k, n-k) \right| &\leq 2r + 2(\alpha_n+3)^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en sommant et en utilisant $(\alpha_n+3)^2 \leq n$. ♡

Corollaire 4. *On a* $\left|\bar{A}'_{n'} - \bar{A}_n - \frac{p}{2}\right| \leq \alpha_n + 14$, *pour* $n' = pn + \alpha_n + 4$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
|\bar{A}'_{n'} - \bar{A}_{pn}| &\leq \left| \frac{A'_{pn}}{n'} - \frac{A'_{pn}}{pn} \right| + \frac{(\alpha_n+4)(\alpha_n+1)}{n'} \\
&\leq (\alpha_n+4)\frac{A_{pn}}{pnn'} + 1 \\
&\leq \alpha_n + 3.
\end{aligned}$$

On conclut en appliquant le corollaire précédent. ♡

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème principal :

Théorème 2. *Soient a' de module 1, $\varepsilon > 0$ et h une fonction régulière. Alors il existe un a de module 1, tel que $|a - a'| < \varepsilon$ et $\lg \hat{f}_n \asymp h(\lg n)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer a' par un nombre proche et à prendre n suffisamment grand, on peut supposer sans perdre de généralité qu'il existe un n tel que (a', n) vérifie la propriété (P) et $(2\pi)2^{-n} < \varepsilon$. Soit M une constante telle que

$$\forall x' > x \quad \bar{h}(x') - \bar{h}(x) \leq M \lg \frac{x'}{x}. \tag{12}$$

Posons $K = 2(M + \alpha'_n + 15)$. Encore sans perdre de généralité on peut supposer que n est suffisamment grand pour que $\bar{h}(n) \geq \bar{A'}_n + K$.

On va construire une suite $\{(a^{(i)}, n_i)\}$ de couples vérifiant la propriété (P) et telle que $a_k^{(i)} = a'_k$, pour tout i et $k < n$. On en déduit déjà $|\alpha'_n - \alpha_{n_i}^{(i)}| \leq 1$, pour tout i (comme dans dans la démonstration du corollaire 1). On prend $(\alpha^{(1)}, n_1) = (\tau_{n,p}(a'), np + \alpha'_n + 4)$, avec p minimal tel que $\bar{A}_{n_1}^{(1)} \geq \bar{h}(n_1) - K$. Un tel p existe, car le premier membre croît en p (corollaire 3) et le deuxième en $\lg p$ (à cause de (12)). Comme de plus $\bar{A}_{n_1}^{(1)} - \bar{A}_{n_1 - p}^{(1')} \leq 2(\alpha_n + 14) + 1/2 \leq K$, pour $a^{(1')} = \tau_{n,p-1}$ et comme $\bar{h}$ est croissant, on a même $\bar{h}(n_1) - K \leq \bar{A}_{n_1}^{(1)} \leq \bar{h}(n_1)$.

Construisons les autres couples par récurrence. Fixons un P tel que $P \geq 2(2K + M \lg(P + 1))$ et supposons par récurrence que pour un certain $i \geq 1$ on ait :

$$\bar{h}(n_i) - K \leq \bar{A}_{n_i}^{(i)} \leq \bar{h}(n_i). \tag{13}$$

Alors on prend $a^{(i+1)} = \tau_{n_i,P}(a^{(i)})$ et n_{i+1} suffisamment grand pour que $(a^{(i+1)}, n_{i+1})$ vérifie la propriété (P) et pour que l'on ait la relation (13), pour $i + 1$ au lieu de i. Ceci est possible, car d'après le corollaire 3 et la choix de P, on a $\bar{A}_{n'_{i+1}}^{(i+1)} \geq \bar{h}(n'_{i+1})$, pour $n'_{i+1} = Pn_i + \alpha_{n_i}^{(i)} + 4$. Sinon, comme $\bar{h}(k) - \bar{A}_k^{(i+1)}$ tend vers l'infini, on peut prendre $n_{i+1} = \min\{k \geq n'_{i+1} | \bar{h}(k) \geq \bar{A}_k^{(i+1)}\}$. Finalement $|\bar{h}(n_{i+1}) - \bar{h}(n_{i+1} - 1)| + |\bar{A}_{n_{i+1}}^{(i+1)} - \bar{A}_{n_{i+1}-1}^{(i+1)}| \leq M + 1 \leq K$.

Alors soit a la limite des $a^{(i)}$ et montrons que a est le nombre désiré dans le théorème. D'après sa construction, on a $a_k = a_k^{(i)}$, pour tout i et $k < n_i$. Il s'en suit en particulier que $d(a, a') < 2^{-n}$, d'où $|a - a'| \leq \varepsilon$.

Puis posons $C = 2 + \max(\alpha_1^{(1)}/1, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}/n_1, P)$. Montrons alors que $\alpha_k^{(i)} \leq Ck$, pour tout $i, k \geq 1$. Ceci est évident pour $i = 1$. Supposons donc $i \geq 2$. Si $1 \leq k < n_1$, on a $|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(1)}| \leq 1$, d'après le lemme 4(a). On en déduit $\alpha_k^{(i)} \leq Ck$. Si $n_{j-1} \leq k < n_j$, pour un certain $1 < j < i$, alors d'après le lemme 4(a), on a $|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}| \leq 1$ et en utilisant le corollaire 2, on en déduit également $\alpha_k^{(i)} \leq (P + 1)k + 1 \leq Ck$. Enfin, pour $k \geq n_i$, c'est encore le corollaire 2. Par passage à la limite on en tire $\alpha_k \leq (C + 1)k$, pour tout $k \geq 1$.

Il nous reste finalement à montrer que $\bar{h}(k) \sim \bar{A}_k$; Effectivement, comme $\bar{h}$ est croissante, ceci implique que A_n est surlinéair de paramètre λ, pour tout $\lambda < 1$. On conclut en appliquant le théorème 1.

Posons $\mu_i = \max\{|\bar{h}(k) - \bar{A}_k| \mid n_{i-1} \leq k < n_i\}$, pour tout $i \geq 1$ et convenons que $n_0 = 1$. Soit $i \geq 2$ et $n_{i-1} \leq k < n_i$. Si $k \geq n'_i$, on a d'après la construction de $(a^{(i)}, n_i)$:

$$\bar{h}(n'_i) \leq \bar{h}(k) \leq \bar{A}^{(i)}_k \leq \bar{A}^{(i)}_{n'_i}.$$

Sinon, si $Pn_{i-1} \leq k \leq n'_i$, on a :

$$|\bar{h}(k) - \bar{A}^{(i)}_k| - |\bar{h}(Pn_{i-1} - 1) - \bar{A}^{(i)}_{Pn_{i-1}-1}| \leq M + \alpha_n + 5.$$

En utilisant le lemme 4(b), on en déduit :

$$\mu_i \leq \max\{|\bar{h}(k) - \bar{A}_k| \mid n_{i-1} \leq k \leq Pn_{i-1}\} + M + \alpha_n + 17.$$

Finalement, supposons $k = qn_{i-1} + r$, avec $q < P$ et $r < n_{i-1}$. Pour un certain $j < i$, nous avons $n_{j-1} \leq r < n_j$. Alors en utilisant le lemme 4(b), le corollaire 3, (12) et (13), on a :

$$\begin{aligned}
|\bar{h}(k) - \bar{A}_k| &\leq |\bar{h}(k) - \bar{A}^{(i)}_k| + 3 \\
&\leq \left|\bar{h}(k) - \left(\frac{qn_{i-1}}{k}\bar{A}^{(i-1)}_{n_{i-1}} + \frac{r}{k}\bar{A}^{(i-1)}_r\right)\right| + \frac{P}{2n_{i-1}} + 13 \\
&\leq \left|\bar{h}(k) - \left(\frac{qn_{i-1}}{k}\bar{A}^{(i-1)}_{n_{i-1}} + \frac{r}{k}\bar{A}_r\right)\right| + P + 16 \\
&\leq \left|\bar{h}(k) - \left(\frac{qn_{i-1}}{k}\bar{h}(n_{i-1}) + \frac{r}{k}\bar{h}(r)\right)\right| + \frac{r}{k}\mu_j + P + K + 16 \\
&\leq \frac{r}{k}\mu_j + M\left(\frac{qn_{i-1}}{k}\lg\frac{k}{n_{i+1}} + \frac{r}{k}\lg\frac{k}{r}\right) + P + K + 16 \\
&\leq \frac{1}{2}\mu_j + M(\lg P + e\lg e) + P + K + 16.
\end{aligned}$$

Au total, nous obtenons donc :

$$\mu_i \leq \frac{1}{2}\max(\mu_1, \cdots, \mu_{i-1}) + Cte,$$

où la constante ne dépend pas de i. Mais ceci implique que les μ_i restent bornés, d'où $\bar{h}(k) \sim \bar{A}_k$, car $\bar{h}$ tend vers l'infini. ♡

5 Conclusion

Dans un certain sens la contribution de cet article est négative ; Effectivement, le théorème 2 montre l'inexistance d'un développement asymptotique général pour les suites mahlériennes. Ceci est une situation, que l'on ne rencontre pas très souvent pour des séries génératrices vérifiant une équation simple. Regardons donc l'intérêt de ce théorème dans un cadre plus large.

Considérons les fonctions g vérifiant une équation construite à partir de $g, z, +, \cdot, \hat{\circ}$, les constantes complexes (que l'on appelle les paramètres de l'équation) et éventuellement la dérivation. Ici on définit $\hat{\circ}$ par $a(z)\hat{\circ}b(z) = a(zb(z))$. Ce genre de fonctions couvre une très grande classe de fonctions relevant de la combinatoire et de l'analyse.

Or l'asymptotique de ce genre de fonctions est souvent miraculeusement simple. Jusqu'au présent, on a rencontré peu de types de comportements possibles. Ceci est dû au fait que l'on se trouve souvent dans le cas, où la plus petite singularité est isolée (souvent c'est même un pôle simple, comme dans le cas de f si $|a| < 1$). Mais même dans le cas où la plus petite singularité n'est pas isolée, comme par exemple dans le cas des arbres 2-3, où g vérifie l'équation

$$g(z) = g(z^2 + z^3) + z,$$

le comportement est encore assez "simple" et admet un équivalent exprimable dans une échelle habituelle (voir [Odl 82]). Ceci est dû au fait que la singularité principale est un point d'accumulation de singularités de module plus grand.

De plus, dans la plupart des cas, quand on modifie légèrement les paramètres dans l'équation de g, on trouve souvent un comportement "voisin". Plus précisément, le nombre de types de comportements que l'on peut obtenir en variant légèrement les paramètres est fini. En plus, dans le cas où le type ne change pas, les "paramètres du type" ne varient que légèrement.

Ce papier donne une exception à cette "règle". Effectivement on montre qu'il y a une infinité de comportements différents pour f_n, quand on fait varier a sur le cercle d'unité, même si on ne considère que des légères variations.

Dans le cadre que nous venons de fixer, l'équation de f est donc "singulière" dans un certain sens. Une question intéressante qui reste donc à étudier est de savoir à quel moment on se trouve dans une telle situation. Nous avons l'impression que la propriété essentielle distinguant ce cas du cas "normal" est que f admet un cercle de centre O comme frontière naturelle, si $|a| \geq 1$. On peut donc s'attendre à ce que les équations suivantes soient également "singulières" :

$$g(z^2) = (1 - z)g'(z) + g(z)^2,$$
$$g(2z) = (1 - z)g(z),$$
$$g(z^2) = (1 - z)g(z)g(z^3), \cdots$$

On pourrait aussi étudier des produits du style :

$$g(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - z^k/a}$$

En revanche les équations suivantes ne sont pas singulières :

$$g(z^2) = (1-z)g(z)g(z^2+z^5),$$

$$g(z) = zg(zg(z)) + z, \cdots$$

Néanmoins, même dans le cas des équations singulières, on peut souvent dire quelque chose quand même. Premièrement, si $|a| > \rho$, nous avons montré que l'on a un équivalent de $\hat{f}_n$. Pour $|a| > 1$ il y a d'ailleurs de bonnes chances de pouvoir obtenir également un équivalent simple de $\hat{f}_n$. En utilisant des fonctions un peu moins habituelles, comme la fonction "sommes des chiffres de n en base 2", on pourra peut-être même obtenir un équivalent de f_n. D'ailleurs le cas où on connaît un équivalent de $\hat{f}_n$, mais pas de f_n, est déjà plus fréquent en asymptotique.

Deuxièmement, en combinatoire, comme les séries génératrices ont normalement des coefficients réels et même entiers, a ne pourra pas prendre n'importe quelle valeur dans la pratique. En revanche, le théorème 2 montre bien, qu'il y a peu de chances de rencontrer des développements classiques pour $\hat{f}_n$, dès que l'on prend des nombres de module 1 pour a, qui ne sont pas racine d'unité.

Troisièmement, le fait de ne pas avoir un équivalent simple d'une suite ne veut pas dire que l'on ne puisse pas décrire efficacement son comportement asymptotique. En effet, historiquement le but du calcul asymptotique est de rapidement pouvoir calculer des bonnes approximations de la suite pour des grandes indices. L'obtention d'un équivalent règle ce problème, mais d'autres méthodes pourrait être efficaces également. Cet article montre que dans le cas précis du produit infini considéré, on est obligé de chercher recours dans des méthodes moins classiques.

6 Références

[Bru 48] N.G. de Bruyn.
On Mahler's partition problem.
Indagationes Math. 10, 210-220.

[Dum 93] P. Dumas.
Récurrences Mahlériennes, suites automatiques, études asymptotiques.
Thèse, Université de Bordeau.

[ErRich 76] P. Erdös, B. Richmond.
Concerning periodicity in the asymptotic behaviour of partition functions
Journal of the Australian Mathematical Society 21. (series A), 447-456.

[**Mah 40**] K. MAHLER.
On a special functional equation.
Journal of the London Mathematical Society 15, 115-123.

[**Odl 82**] A.M. ODLYZKO.
Periodic oscillations of coefficients of power series that satisfy functional equations.
Advances in Mathematics 44, 180-205.

[**Pen 52**] W.B. PENNINGTON.
On Mahler's partition problem.
Annals of Mathematics Vol. 57, No. 3, 531-546

[**VdH 93**] J. VAN DER HOEVEN
Théorie des bases standard et séries mahlériennes généralisées.
Rapport de D.E.A. non publié, École Polytechnique, France.