Introduction à l'

Asymptotique automatique

Par Joris van der Hoeven

Lab. : LIX, École polytechnique, France

Email: vdhoeven@lix.polytechnique.fr

Web : http://lix.polytechnique.fr:80/~vdhoeven/

Caen, 9-12-1997

Motivation

Asymptotique automatique et transséries

– Asymptotique de phénomènes *fortement* non linéaires.

– Théorie systématique.

– Théorie effective $\Rightarrow$ accent sur les aspects algébriques.

– Propriétés analytiques *via* resommation.

Exemples

– Asymptotique de l'inverse fonctionnelle de xe^x pour $x \to \infty$. Intervient dans l'étude des nombres de Bell.

– Résolution asymptotique d'équations différentielles non linéaires comme

$$f' f''' - f''^2 - e^{e^x} f = e^{-x^2}.$$

Historique abrégé

Théorie

– Newton ($\pm$ 1670) : séries formelles, polygone de Newton.

– Puiseux, Briot, Bouquet, Fine, Smith (1850–1900) : méthode des polygones de Newton, extensions et raffinements.

– Hardy (1910–1911) : Échelles générales, fonctions exp-log, corps de Hardy.

– Écalle (1990–*) : Transséries et resommation.

Algorithmes

– Shackell (1990–*) : formes imbriquées de fonctions exp-log. Exemple :

$$e^{\log^2 x\, e^{e^{\log^3 x(\pi+o(1))}}}$$

– Shackell (1991) : développements de fonctions exp-log et de fonctions liouvilliennes (algorithme incomplet).

– Gonnet, Gruntz (1992) : développements de fonctions exp-log.

– Richardson (1992–1996) : constantes exp-log.

– Salvy, Gruntz (1990–1996) : implantations en MAPLE.

Plan

1. **fonctions exp-log**

2. **conjecture de Hardy**

I : fonctions exp-log

Une fonction exp-log est une fonction f construite à partir de $\mathbb{Q}$, x par $+, -, \times, /, \exp$ et $\log$. But : trouver le développement de f pour $x \to \infty$ (si f y est définie).

Les problèmes

- Trouver la bonne échelle.
- Éviter les annulations indéfinies :

$$f = \frac{1}{1 - x^{-1} - e^{-x}} - \frac{1}{1 - x^{-1}} \quad (x \to \infty).$$

Échelles asymptotiques

Définition échelle asymptotique

$$S_B = \{б_1^{\alpha_1} \cdots б_n^{\alpha_n} | \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\},$$

générée par la base asymptotique $B = \{б_1, \cdots, б_n\}$ de fonctions infinitésimales vérifiant

$$б_1 \lll \cdots \lll б_n.$$

Ici $б \lll б'$ si $б$ est d'une échelle plus lente que $б'$:

$$б \lll б' \;\Leftrightarrow\; \log|б| \prec \log|б'|.$$

Exemple

$B = \{x^{-1}, e^{-x}\}$ et $S_B = \{x^\alpha e^{\beta x} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Développement en transsérie

Écriture totale non archimédienne :

$$f = \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} f_{\alpha_n, \cdots, \alpha_1} б_1^{\alpha_1} \cdots б_n^{\alpha_n}$$

Écriture récursive lexicographique :

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\alpha_n} f_{\alpha_n} б_n^{\alpha_n} \;; \\
f_{\alpha_n} &= \sum_{\alpha_{n-1}, \alpha_n} f_{\alpha_n, \alpha_{n-1}} б_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \;; \\
&\vdots \\
f_{\alpha_n, \cdots, \alpha_2} &= \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} f_{\alpha_n, \cdots, \alpha_2} б_1^{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Représentations exactes

Éviter des annulations indéfinies

Développer lexicographiquement

$$f = \frac{1}{1 - x^{-1} - e^{-x}} - \frac{1}{1 - x^{-1}} \quad (x \to \infty)$$

par rapport à e^{-x} puis x^{-1}. Garder les représentations exactes des coefficients du développement en e^{-x}.

Problème des constantes

Richardson : le problème du test à zéro pour les constantes exp-log modulo se réduit à la CdS :

Conjecture. (Schanuel) *Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors*

$$\operatorname{tr}\deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n, e^{\alpha_1}, \cdots, e^{\alpha_n}] \geqslant n.$$

Germes en $+\infty$

vdH : le problème du test à zéro asymptotique pour les fonctions exp-log en $+\infty$ se réduit au problème des constantes.

Théorème. (vdH) *Il existe un algorithme de développement pour les fonctions exp-log modulo la conjecture de Schanuel.*

Bases normales

Une base normale est une base asymptotique $B = \{б_1, \cdots, б_n\}$ vérifiant

- $б_1 = \log_l^{-1} x = \log^{-1} \overset{l \text{ fois}}{\cdots} \log x$;
- $\log б_i \in \mathbb{R}[\![б_1; \cdots; б_{i-1}]\!]$, pour tout $i \geqslant 2$,

où $x \to \infty$.

Exemple

$$B_1 = \{\log^{-1} x, x^{-1}, x^{-x}, \exp\left(\tfrac{-x^x}{1-x^{-1}}\right)\}$$

est une base normale.

$$B_2 = \{x^{-1}, e^{-e^x}\}$$

et

$$B_3 = \{x^{-1}, e^{-x+e^{-x^2}}, e^{-x^2}\}$$

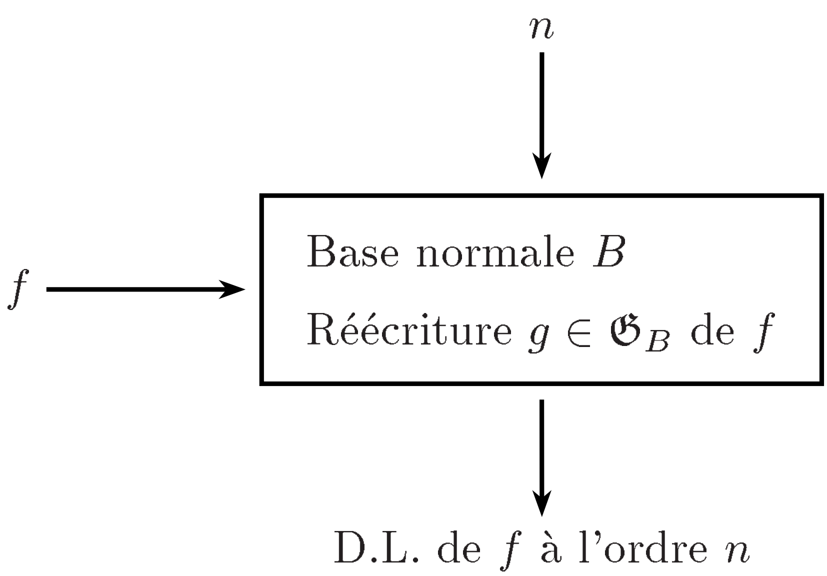
ne sont pas des bases normales.

Déscription algorithme

La classe $\mathfrak{G}_B$, où $B = \{\text{б}_1, \cdots, \text{б}_n\}$

- Constantes dans $\mathbb{Q}$.
- Éléments de S_B.
- $+, -, \cdot, /$.
- $\log$ pour des arguments c avec $\lim c \in \mathbb{R}_*^+$.
- $\exp$ pour des arguments bornés.

Note : les éléments de $\mathfrak{G}_B$ se développent *naturellement* en transséries dans $\mathbb{R}[[\text{б}_1; \cdots; \text{б}_n]]$.



L'algorithme expand

ENTRÉE : expression exp-log f.

SORTIE : base normale effective B et réécriture $g \in \mathfrak{G}_B$ de f.

Cas $f \in \mathbb{Q}$ ou $f = x$

Retourner f.

Somme, différence, produit, quotient

Disons $f = f_1 \square f_2$. Retourner $\texttt{expand}(f_1) \square \texttt{expand}(f_2)$.

Logarithme $f = \log f_1$

Soit $g_1 = \texttt{expand}(f_1)$. Écrire

$$g_1 = \mathfrak{б}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{б}_n^{\alpha_n} (c + \varepsilon) \quad (\varepsilon \prec\!\!\prec 1).$$

Si $\alpha_1 \neq 0$, rajouter $\log^{-1} \mathfrak{б}_1^{-1}$ à B. Retourner

$$\log g_1 = \alpha_1 \log \mathfrak{б}_1 + \cdots \alpha_n \log \mathfrak{б}_n + \log(1 + \varepsilon).$$

Note : B est une base normale effective $\Rightarrow$
développements pour $\log \mathfrak{б}_1, \cdots, \log \mathfrak{б}_n$.

Exponentielle $f = \exp f_1$

Soit $g_1 = \texttt{expand}(f_1)$. Si g_1 est bornée, retourner $\exp g_1$. Sinon, tester si $g_1 \asymp \log б_i$ pour un certain i.

Cas 1 : $g_1 \asymp \log б_i$

Écrire $g_1 = \lambda \log б_i + (g_1 - \lambda \log б_i)$. Retourner

$$e^{g_1} = б_i^{\lambda} \texttt{expand}(e^{g_1 - \lambda \log б_i}).$$

Cas 2 : $\forall i \quad g_1 \not\asymp \log б_i$

Moralement : on rajoute $e^{-|g_1|}$ à B et on retourne

$$e^{g_1} = (e^{-|g_1|})^{-\operatorname{sign} g_1}.$$

Développement de g_1 par rapport aux $б_i \in B$ avec $б_i \lll e^{-|g_1|}$?
Méthode : écrire $g_1 = g_1^{+} + g_1^{-}$ et

$$e^{g_1} = e^{g_1^{+}} e^{g_1^{-}},$$

avec $g_1^{+} = [б_j^0] g_1$ et faire $g_1 := g_1^{б_j}$, pour $j = n, n-1, \cdots$ tant que la condition n'est pas vérifiée.

Terminaison

Dans boucle du cas 1 : l'indice i décroît, pendant que B reste invariant.

Exemple 1

$$f = \frac{1}{1 - x^{-1} - e^{-x}} - \frac{1}{1 - x^{-1}}.$$

Initialisation : $B = \{б_1, \cdots, б_n\} := \{x^{-1}\}$.

e^{-x} : puisque $-x \not\asymp \log б_1$, insertion $e^{-x} \rightsquigarrow B$ et $e^{-x} = б_2$, d'où

$$B := \{x^{-1}, e^{-x}\}.$$

f se réécrit

$$f = \frac{1}{1 - б_1 - б_2} - \frac{1}{1 - б_1}.$$

Développement de f

On développe d'abord par rapport à $б_2$:

$$f = \left(\frac{1}{1 - б_1} - \frac{1}{1 - б_1}\right) + \frac{б_2}{(1 - б_1)^2} + \frac{б_2^2}{(1 - б_1)^3} + \cdots.$$

L'annulation $(1 - б_1)^{-1} - (1 - б_1)^{-1} = 0$ est détectée symboliquement.

Transsérie pour f

$$\boxed{\begin{aligned} f \quad &= \quad e^{-x} + 2x^{-1}e^{-x} + 3x^{-2}e^{-x} + \cdots \\ &+ \quad e^{-2x} + 3x^{-1}e^{-2x} + 6x^{-2}e^{-2x} + \cdots \\ &+ \quad e^{-3x} + 4x^{-1}e^{-3x} + 10x^{-2}e^{-3x} + \cdots \\ &+ \quad \cdots. \end{aligned}}$$

Exemple 2

$$f = \log\log(xe^{xe^x}+1) - \exp\exp(\log\log x + \frac{1}{x})$$

Initialisation : $B = \{б_1, \cdots, б_n\} := \{x^{-1}\}$.

e^x : puisque $x \not\asymp \log б_1$, insertion $e^{-x} \rightsquigarrow B$ et $e^x = б_2^{-1}$, d'où

$$B := \{x^{-1}, e^{-x}\}.$$

e^{xe^x} : test $xe^x = б_1^{-1}б_2^{-1} \asymp \log б_2 = -б_1^{-1} = -x$?
Non, donc $e^{-xe^x} \rightsquigarrow B$ et

$$B := \{x^{-1}, e^{-x}, e^{-xe^x}\}.$$

$\log(xe^{xe^x}+1)$: on a $xe^{xe^x}+1 = б_1^{-1}б_3^{-1}+1$.
L'exposant $б_1$ dans $б_1^{-1}б_3^{-1}$ est non nul, donc $\log^{-1} x \rightsquigarrow B$.
On obtient

$$B := \{\log^{-1} x, x^{-1}, e^{-x}, e^{-xe^x}\}$$

et

$$\log(xe^{xe^x}+1) = б_2^{-1}б_3^{-1} + б_1^{-1} + \log(1+б_2б_4).$$

$\log\log(xe^{xe^x}+1)$: traité de façon analogue. B reste invariant et

$$\log\log(xe^{xe^x}+1) = б_2^{-1}+б_1^{-1}+\log[1+б_2б_3[б_1^{-1}+\log(1+б_2б_4)]].$$

$\log x$: $\log x = б_1^{-1}$.

$\log\log x$: Insertion $\log^{-1}\log x \rightsquigarrow B$;

$$B := \{\log^{-1}\log x, \log^{-1} x, x^{-1}, e^{-x}, e^{-xe^x}\}.$$

$\exp(\log\log x + x^{-1})$: $\log\log x + x^{-1} = б_1^{-1} + б_3 \to \infty$.
On a $б_1^{-1} \asymp \log б_2$, d'où :

$$\exp(\log\log x + \tfrac{1}{x}) = б_2^{-1} e^{б_3},$$

avec $б_3 \to 0$.

$\exp\exp(\log\log x + 1/x)$: $б_2^{-1} e^{б_3} \asymp \log б_3$ et

$$\exp\exp(\log\log x + \tfrac{1}{x}) = б_3^{-1} \exp[б_2^{-1} \exp б_3 - б_2^{-1}],$$

avec $б_2^{-1} \exp б_3 - б_2^{-1} \to 0$.

On obtient

$$\boxed{f = -\frac{\log^2 x}{2x} - \frac{\log x}{2x} - \frac{\log^3 x}{6x^2} - \frac{\log^2 x}{2x^2} + O\left(\frac{\log x}{x^2}\right)}.$$

Plus précisement :

$$\begin{aligned} f &= б_3^{-1} + б_2^{-1} + \log[1 + б_3 б_4 [б_2^{-1} + \log(1 + б_3 б_5)]] \\ &- б_3^{-1} \exp[б_2^{-1} \exp б_3 - б_2^{-1}], \end{aligned}$$

avec

$$B = \{\log^{-1}\log x, \log^{-1} x, x^{-1}, e^{-x}, e^{-xe^x}\}.$$

II : Une conjecture de Hardy

Définition L-fonction

Une L-fonction est une fonction construite à partir de $\mathbb{R}, x$ par $+, -, \times, /$, les fonctions algébriques, exp et log.

La conjecture de Hardy

Il n'existe pas de L-fonction f telle que

$$f \asymp (\log x \log \log x)^{inv}$$

pour $x \to \infty$.

Démonstrations données par

- VdH : thése.
- Macintyre, Marker, van den Dries : papier à paraître.

Nous utilisons sans preuve

- L'inverse fonctionnelle de $x \log x$ n'est pas *égal* à une L-fonction (Liouville 1838).
- Toute L-fonction est une transsérie *convergente* ainsi que l'inverse fonctionnelle de $\log x \log \log x$ (thèse).

Décompositions de transséries

B : base normale $B = \{б_1, \cdots, б_n\}$.

f : transsérie dans $\mathbb{R}[\![б_1; \cdots; б_n]\!]$.

Décomposition canonique de f :

$$f = f^{\uparrow} + f^{c} + f^{\downarrow},$$

avec

$$\begin{aligned}
f^{\uparrow} &= \sum_{1 \prec\!\!\prec \text{ц} \in S_B} f_{\text{ц}} \text{ц} = \\
&= \sum_{\alpha_n < 0} f_{\alpha_n} б_n^{\alpha_n} + \cdots + \sum_{\alpha_1 < 0} f_{0,\cdots,0,\alpha_1} б_1^{\alpha_1}; \\
f^{c} &= f_{0,\cdots,0} \\
f^{\downarrow} &= \sum_{1 \succ\!\!\succ \text{ц} \in S_B} f_{\text{ц}} \text{ц} = \\
&= \sum_{\alpha_n > 0} f_{\alpha_n} б_n^{\alpha_n} + \cdots + \sum_{\alpha_1 > 0} f_{0,\cdots,0,\alpha_1} б_1^{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Décompositions de L-fonctions

Si f est une L-fonction, alors de même pour $f^{\uparrow}, f^{c}$ et $f^{\downarrow}$.

Inversion fonctionnelle de $x \log x$

1. On écrit

$$x \log x = \exp \circ \exp \circ \left(x + \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right) \right) \circ \log \circ \log,$$

donc on se ramène au problème de l'inversion de

$$g = x + \log \left(1 + \frac{x}{e^x} \right).$$

2. On cherche l'inverse sous la forme $f = x + \varepsilon$, d'où

$$g \circ (x + \varepsilon) = g + g'\varepsilon + \tfrac{1}{2} g'' \varepsilon^2 + \cdots = x.$$

On résoud de proche en proche :

$$x + \frac{x}{e^x} + \cdots + \varepsilon(1 + \cdots) + \cdots = x \Rightarrow f = x - \frac{x}{e^x} + \cdots$$

Ensuite

$$x + \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{2e^{2x}} + \cdots + \left(1 + \frac{1-x}{e^x} + \cdots \right) \left(-\frac{x}{e^x} + \tilde{\varepsilon} + \cdots \right) + \cdots = x,$$

d'où

$$f = x - \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{2e^{2x}} + \frac{x}{e^{2x}} \cdots \in \mathbb{R}[\![x^{-1}; e^{-x}]\!].$$

3. On remonte :

$$e^f = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{x}{e^{2x}} + \cdots \right) \in \mathbb{R}[\![x^{-1}; e^{-x}]\!]$$

et

$$e^{e^f} = e^{e^x - x} \left(1 + \frac{x}{e^{2x}} + \cdots \right) \in e^{e^x - x} \mathbb{R}[\![x^{-1}; e^{-x}]\!].$$

Enfin

$$(x \log x)^{inv} = \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{\log \log x}{\log^2 x} + \cdots \right).$$

Démonstration de la conjecture

Nous constatons d'abord que pour $f, g > 0$

$$f \asymp g \Leftrightarrow (\log f)^{\uparrow} = (\log g)^{\uparrow}.$$

Supposons que $(\log x \log\log x)^{inv}$ soit une L-fonction.
Alors il en est de même pour

$$\log(\log x \log\log x)^{inv} = (x \log x)^{inv}$$

et (en développant $(x\log x)^{inv}$ utilisant `expand` par rapport à une base normale $B \supseteq \{\log^{-1}\log x, \log^{-1} x, x^{-1}\}$) pour

$$[(x \log x)^{inv}]^{\uparrow}.$$

Or

$$(x \log x)^{inv} \in \frac{x}{\log x}\mathbb{R}[\![\log_2^{-1} x; \log^{-1} x]\!],$$

donc en particulier

$$[(x \log x)^{inv}]^{\uparrow} = (x \log x)^{inv},$$

Donc $(x\log x)^{inv}$ est une L-fonction, ce qui contredit le théorème de Liouville.

Plus généralement

Si $0 < f \succ\!\!\succ 1$ n'est pas une L-fonction, alors $\exp_r f$ n'est pas asymptotique à une L-fonction pour tout r suffisamment grand.

Exemple : $\exp \int e^{x^2}$ n'est pas asymptotique à une L-fonction.