Introduction aux transséries

Par Joris van der Hoeven

Lab. : LIFL, Université de Lille I, France

: LIX, École polytechnique, France

Email: vdhoeven@lix.polytechnique.fr

Web : http://lix.polytechnique.fr:80/~vdhoeven/

Paris, 19-12-1997

Motivation

Transséries

- Asymptotique de phénomènes fortement non linéaires.
- Théorie systématique.
- Théorie effective $\Rightarrow$ accent sur les aspects algébriques.
- Propriétés analytiques *via* resommation.

Exemples

- Asymptotique de l'inverse fonctionnelle de xe^x pour $x \to \infty$. Intervient dans l'étude des nombres de Bell.
- Résolution asymptotique d'équations différentielles non linéaires comme

$$f' f''' - f''^2 - e^{e^x} f = e^{-x^2}.$$

Historique abrégé

Asymptotique, aspects algébriques.

– Newton ($\pm$ 1670) : séries formelles, polygone de Newton.

– Puiseux, Briot, Bouquet, Fine, Smith (1850–1900) : méthode des polygones de Newton, extensions et raffinements.

– Levi-Civita, Hahn, Higman (1890–1950) : séries formelles généralisées. Exemple :

$$z + z^{\pi} + z^{\pi^2} + z^{\pi^3} + \cdots \quad (z \to 0).$$

– Dahn, Écalle (1984–1990) : transséries. Exemple :

$$e^{e^x + x^{-1} e^x + x^{-2} e^x + \cdots} + \frac{e^{e^x + x^{-1} e^x + \cdots}}{\log x} + \cdots.$$

Plan

I. Séries généralisées

II. Transséries

III. Opérations sur les transséries.

IV. Une conjecture de Hardy.

V. La méthode de Newton.

I : séries généralisées

$(z \to 0, x \to \infty)$

Exemples de différents types de séries.

- $f_1 = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots;$
- $f_2 = 1 + z + z^2 + z^e + z^3 + z^{e+1} + \cdots;$
- $f_3 = z + z^\pi + z^{\pi^2} + z^{\pi^3} + \cdots;$
- $$\begin{aligned} f_4 = 1 + {} & x^{-1/2} + x^{-3/4} + x^{-7/8} + \cdots + \\ & x^{-1} + x^{-3/2} + x^{-7/4} + \cdots + \\ & x^{-2} + \cdots \cdots \end{aligned};$$
- $$\begin{aligned} f_5 = {} & 1 + x^{-1} + x^{-2} + \cdots + \\ & e^{-x} + x^{-1}e^{-x} + \cdots + \\ & e^{-2x} + \cdots \cdots \end{aligned};$$
- $$\begin{aligned} f_6 = {} & -\frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{e^{-x^2}}{4x^3} - \frac{e^{-x^2}}{8x^5} + \cdots \\ & -\frac{e^{-3x^2}}{6x} + \frac{e^{-3x^2}}{36x^3} - \cdots \\ & -\frac{e^{-5x^2}}{10x} + \cdots \cdots \end{aligned}.$$
- $$\begin{aligned} f_7 = {} & \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots + \\ & \frac{1}{e^{\log^2 x}} + \frac{1}{e^{2\log^2 x}} + \frac{2}{e^{\log^2 x}} + \frac{2}{e^{8\log^2 x}} \cdots \\ & \frac{1}{e^{\log^4 x}} + \cdots \cdots \end{aligned}.$$

Origines

- $f_1 = \exp z\,;$
- $f_2 = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^e)}\,;$
- $f_3(z) = z + f_3(z^\pi)\,;$
- $\psi(x) = x + \psi(\sqrt{x})$, où $f_4 = \frac{\psi}{x-1}\,;$
- $f_5 = \dfrac{1}{(1-x^{-1})(1-e^{-x})}\,;$
- $f_6 = \displaystyle\int \sin e^{-x^2}\,;$
- $f_7(x) = \dfrac{1}{x} + f(x^2) + f(e^{\log^2 x}).$

Définition séries formelles généralisées

C : corps de constantes.

Ц : groupe commutatif de monômes ordonné par $\prec\!\!\prec$.

$$f = \sum_{\text{ц} \in \text{Ц}} f_{\text{ц}} \text{ц}.$$

$\operatorname{supp} f = \{\text{ц} | f_{\text{ц}} \neq 0\}$: support de f.

$C[\![\text{Ц}]\!]$: ensemble de séries f réticulées, c.à.d. de support réticulé :

$$\operatorname{supp} f \subseteq \text{ц}_1^{\mathbb{N}} \cdots \text{ц}_n^{\mathbb{N}} \text{Ш},$$

où $\text{ц}_1, \cdots, \text{ц}_n \prec\!\!\prec 1$ et Ш fini.

$C[[\text{Ц}]]$: ensemble de séries f belordonnées, c.à.d. de support bel ordonné. Ensemble belordonné $(E, <)$, si tout sous ensemble de E admet un nombre fini d'éléments minimaux.

Exemples

- $\mathbb{C}((z)) = C[\![z^{\mathbb{Z}}]\!]$: séries de Laurent en $z \to 0$.
  Attention : $z^{\alpha} \prec\!\!\prec z^{\beta} \Leftrightarrow \beta < \alpha$.

- $\mathbb{C}[\![z^{\mathbb{Q}}]\!]$: séries de Puiseux en $z \to 0$.

- $\mathbb{C}((z_1, z_2)) = C[\![z_1^{\mathbb{Z}} z_2^{\mathbb{Z}}]\!]$: séries de Laurent en deux variables.
  Ici $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \prec\!\!\prec 1$, si $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

- $\mathbb{R}[\![x^{-\mathbb{R}}; e^{-\mathbb{R}x}]\!]$: séries réticulées en e^{-x} puis x^{-1}.
  Ici $x^{-\alpha} e^{-\beta x} \prec\!\!\prec 1$, si $\beta > 0$ ou $\beta = 0$ et $\alpha > 0$.

Ensembles belordonnés

Si E, F belordonnés, alors de même pour :

- $E \amalg F$ pour l'ordre par composantes.
- $E \times F$ pour l'ordre produit.
- E^* les mots sur E, avec l'ordre d'abritement :

$$x_1 \cdots x_n \leqslant y_1 \cdots y_m$$

  ss'il existe une injection croissante $\varphi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, m\}$ avec

$$x_1 \leqslant y_{\varphi(1)}, \cdots, x_n \leqslant y_{\varphi(n)}.$$

- $E^\diamondsuit$ les mots commutatifs E, avec l'ordre quotient de E^*.

Opérations sur les séries belordonnées

Pour $f, g \in C[[\text{Ц}]]$, on définit :

- $f + g = \displaystyle\sum_{\text{ц} \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g} (f_{\text{ц}} + g_{\text{ц}})\text{ц}.$
- $fg = \displaystyle\sum_{(\text{ц},\text{щ}) \in \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g} f_{\text{ц}} g_{\text{щ}} \text{цщ}.$
- Si φ série formelle et $\text{ц} \prec\!\!\prec 1$ pour tout $\text{ц} \in \operatorname{supp} f$:

$$\varphi \circ f = \sum_{\text{ц}_1^{k_1} \cdots \text{ц}_n^{k_n} \in (\operatorname{supp} f)^\diamondsuit} \varphi_{k_1 + \cdots + k_n} f_{\text{ц}_1}^{k_1} \cdots f_{\text{ц}_n}^{k_n} \text{ц}_1^{k_1} \cdots \text{ц}_n^{k_n}.$$

De même pour $f, g \in C[[\text{Ц}]]$, car si $\text{Ш}_1, \text{Ш}_2 \subseteq \text{Ц}$ réticulés, alors de même pour $\text{Ш}_1 \cup \text{Ц}_2, \text{Ш}_1\text{Ш}_2$ et ${\text{Ц}_1}^\diamondsuit$ (si $\text{ц} \prec\!\!\prec 1$ pour tout $\text{ц} \in \text{Ц}_1$).

Relations asymptotiques

$f \prec\!\!\prec 1$: f infinitésimal si $\text{ц} \prec\!\!\prec 1$ pour tout $\text{ц} \in \operatorname{supp} f$.

$f \prec\!\!\prec g$: si $f = \varepsilon g$ avec ε infinitésimal.

Si Ц totalement ordonné tout $f \neq 0$ s'écrit

$$f = c_f \mathrm{M}_f (1 + \varepsilon) \ \ (\varepsilon \prec\!\!\prec 1)$$

et on a

$$f \prec\!\!\prec g \Leftrightarrow \mathrm{M}_f \prec\!\!\prec \mathrm{M}_g.$$

Si C est totalement ordonné, on a un ordre total sur $C[[\text{Ц}]]$:

$$f > 0 \Leftrightarrow c_f > 0.$$

Échelles asymptotiques

$S \subseteq C[[\text{Ц}]]$ est une échelle ssi

– S est un groupe.

– Chaque $\text{ц} \in S$ admet un unique monôme dominant $\mathrm{M}_{\text{ц}}$,

– Pour tous $\text{ц}, \text{ш} \in S$, on a $\mathrm{M}_{\text{ш}} = \mathrm{M}_{\text{ц}} \Rightarrow \text{ш} = \text{ц}$.

Extension par linéarité (forte)

Si S est une échelle, alors il y a un unique plongement naturel

$$C[[S]] \hookrightarrow C[[\text{Ц}]]$$

qui est "fortement linéaire" et envoie chaque $\text{ц} \in S$ vers lui-même.

II : transséries

But

On veut construire un corps de séries généralisées $\mathbb{R}[\![\![x]\!]\!] = \mathbb{R}[\![\mathfrak{T}]\!]$ sur lequel on a également des applications exp et log, telles que $\exp f$ resp $\log f$ est défini pour tout f resp. tout $f > 0$.

Idée

En partant du corps $\mathbb{R}[\![E_0]\!] = \mathbb{R}[\![x^{-\mathbb{R}}]\!]$ on construit une suite

$$\mathbb{R}[\![E_0]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}[\![E_1]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}[\![E_2]\!] \hookrightarrow \cdots$$

de corps, telle que l'exponentielle de tout élément dans $\mathbb{R}[\![E_i]\!]$ est définie dans $\mathbb{R}[\![E_{i+1}]\!]$. En passant à la limite, on trouve le corps $\mathbb{R}^{alog}[\![\![x]\!]\!] = \mathbb{R}[\![L_0]\!]$ de transséries alogarithmiques tel que l'exponentielle est entièrement définie sur $\mathbb{R}^{alog}[\![\![x]\!]\!]$.

Ensuite, on construit une deuxième suite

$$\mathbb{R}[\![L_0]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}[\![L_1]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}[\![L_2]\!] \hookrightarrow \cdots$$

de corps, telle que le logarithme de tout élément dans $\mathbb{R}[\![L_i]\!]^+_*$ est définie dans $\mathbb{R}[\![L_{i+1}]\!]$. En passant à nouveau à la limite, on trouve le corps $\mathbb{R}[\![\![x]\!]\!]$ de transséries.

Construction de $\mathbb{R}[\![E_1]\!]$

Chaque série $f \in \mathbb{R}[\![x^{-1}]\!]$ se décompose

$$\begin{array}{ccccccc} f & = & f^{\uparrow} & + & f^{c} & + & f^{\downarrow} = \\ & & \sum_{\alpha<0} f_\alpha x^{-\alpha} & + & f_0 & + & \sum_{\alpha>0} f_\alpha x^{-\alpha}. \end{array}$$

On prend

$$E_1 = x^{-\mathbb{R}} \exp \mathbb{R}[\![x^{-1}]\!].$$

Donc toute $f \in \mathbb{R}[\![E_1]\!]$ s'écrit

$$f = \sum_{\substack{\alpha \\ g=\sum_{\beta<0} g_\beta x^{-\beta}}} f_{x^{-\alpha}e^g} x^{-\alpha} e^g.$$

On prend l'ordre lexicographique sur E_1 :

$$x^{-\alpha} e^g \prec\!\!\!\prec 1 \Leftrightarrow g < 0 \ \vee \ (g = 0 \ \wedge \ \alpha > 0).$$

Pour tout $f \in \mathbb{R}[\![E_1]\!]$:

$$\exp f = \exp f^{\uparrow} \exp f^{c} \exp f^{\downarrow}.$$

Construction de $\mathbb{R}[\![E_{i+1}]\!]$

Chaque série $f \in \mathbb{R}[\![E_i]\!]$ se décompose

$$\begin{array}{ccccccc} f & = & f^{\uparrow} & + & f^{c} & + & f^{\downarrow} = \\ & & \sum_{ц \succ\!\!\!\succ 1} f_ц ц & + & f_1 & + & \sum_{ц \prec\!\!\!\prec 1} f_ц ц. \end{array}$$

On prend

$$E_{i+1} = x^{-\mathbb{R}} \exp \mathbb{R}[\![E_i]\!].$$

Enfin

$$L_0 = E_\infty = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots.$$

Construction de $\mathbb{R}[\![L_1]\!]$

On sait construire $\mathbb{R}^{alog}[\![\![x]\!]\!]$.

Formellement, on sait donc construire $\mathbb{R}^{alog}[\![\![\log x]\!]\!]$.

Il suffit de montrer comment plonger

$$\mathbb{R}^{alog}[\![\![x]\!]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}^{alog}[\![\![\log x]\!]\!].$$

Par définition on a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{alog}[\![\![x]\!]\!] & \rightarrow & \mathbb{R}^{alog}[\![\![\log x]\!]\!]. \\ f & \mapsto & f \circ \log . \end{array}$$

Pour le plongement ι restreint à $\mathbb{R}[\![E_0]\!]$ on pose

$$\iota(x^\alpha) = \exp(\alpha \log x) \in \mathbb{R}[\![E_1 \circ \log]\!]$$

et on étend par linéarité.

Ensuite, pour $x^\alpha e^f \in \mathbb{R}[\![E_i]\!]$:

$$\iota(x^\alpha e^f) = \exp(\alpha \log x + \iota(f)) \in \mathbb{R}[\![E_{i+1} \circ \log]\!],$$

et on étend toujours par linéarité.

Construction de $\mathbb{R}[\![\![x]\!]\!]$

On prend la limite inductive de

$$\mathbb{R}[\![\![x]\!]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}[\![\![\log x]\!]\!] \hookrightarrow \mathbb{R}[\![\![\log_2 x]\!]\!] \hookrightarrow \cdots.$$

($\log_k$: logarithme itéré k fois)

Remarque

De façon alternative, on sature d'abord pour log et puis pour exp.

III : opérations sur les transséries

Dérivation par rapport à x

Cas $f \in \mathbb{R}[\![E_0]\!]$:

$$f' = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{R}} f_\alpha x^{-\alpha} \right)' = \frac{-1}{x} \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha f_\alpha x^{-\alpha}.$$

Cas $f \in \mathbb{R}[\![E_{k+1}]\!]$ $(k = 0, 1, \cdots)$:

$$f' = \left(\sum_{ц \in x^{-\mathbb{R}} \exp(\mathbb{R}[\![E_k]\!]^{\uparrow})} f_ц ц \right)' = \sum_{ц \in \exp(\mathbb{R}[\![E_k]\!]^{\uparrow})} f_ц (\log ц)' ц.$$

f' est bien défini, car si

$$\operatorname{supp} f \subseteq ц_1^{\mathbb{N}-p} \cdots ц_n^{\mathbb{N}-p} щ = Ц,$$

alors

$$\operatorname{supp} f' \subseteq (\operatorname{supp} \log ц_1 \cup \cdots \cup \operatorname{supp} \log ц_n \cup \operatorname{supp} \log щ) Ц.$$

Cas général : on étend la dérivation à $\mathbb{R}[\![\![x]\!]\!]$ par

$$(f \circ \log x)' = \frac{f' \circ \log x}{x}.$$

C'est bien une dérivation

Linéarité : triviale.

Aussi : $(e^f)' = f'e^f$ pour transmonômes e^f.

Pour transmonômes e^f, e^g, on a donc

$$(e^f e^g)' = (e^{f+g})' = (f+g)'e^{f+g} = f'e^f e^g + g'e^f e^g = (e^f)'e^g + e^f(e^g)'.$$

Cas général : linéarité.

Composition à droite par $g \in \mathbb{T}_{\infty}^{+}$

Cas $f \in \mathbb{R}[\![x^{-\mathbb{R}}]\!]$: on a le plongement naturel

$$\mathbb{R}[\![(1/g)^{\mathbb{R}}]\!] \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}[\![\![x]\!]\!]$$

et l'isomorphisme naturel

$$\mathbb{R}[\![(1/x)^{\mathbb{R}}]\!] \overset{\psi}{\to} \mathbb{R}[\![(1/g)^{\mathbb{R}}]\!],$$

qui correspond à la substitution de g pour x. Alors

$$f \circ g = \varphi(\psi(f)).$$

Cas $f \in \mathbb{R}[\![E_{k+1}]\!]$: déjà ,

$$(\exp h) \circ g \overset{\text{def}}{=} \exp(h \circ g),$$

pour $h \in \mathbb{R}[\![E_k]\!]^{\uparrow}$.

Récurrence sur $k \Rightarrow$ les $(\exp h) \circ g$ forment une échelle asymptotitique S, dont un plongement naturel

$$\mathbb{R}[\![S]\!] \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}[\![\![x]\!]\!].$$

La substition de $\mathfrak{m} \circ g$ pour chaque $\mathfrak{m} \in E_{k+1}$ détermine un deuxième morphisme naturel :

$$\mathbb{R}[\![E_{k+1}]\!] \overset{\psi}{\to} \mathbb{R}[\![S]\!],$$

On définit $f \circ g = \varphi(\psi(f))$.

Enfin, on étend à $\mathbb{R}[\![\![x]\!]\!]$ par $(f \circ \log) \circ g = f \circ (\log \circ g)$.

Propriétés

$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$;
$(f_1 f_2) \circ g = (f_1 \circ g)(f_2 \circ g)$;
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
$(f \circ g)' = g'(f' \circ g)$.

Inversion fonctionnelle de $x \log x$

1. On écrit

$$x \log x = \exp \circ \exp \circ \left(x + \log\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right) \circ \log \circ \log,$$

donc on se ramène au problème de l'inversion de

$$g = x + \log\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

2. On cherche l'inverse sous la forme $f = x + \varepsilon$, d'où

$$g \circ (x + \varepsilon) = g + g'\varepsilon + \tfrac{1}{2} g'' \varepsilon^2 + \cdots = x.$$

On résoud de proche en proche :

$$x + \frac{x}{e^x} + \cdots + \varepsilon(1 + \cdots) + \cdots = x \Rightarrow f = x - \frac{x}{e^x} + \cdots$$

Ensuite

$$x + \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{2e^{2x}} + \cdots + \left(1 + \frac{1-x}{e^x} + \cdots\right)\left(-\frac{x}{e^x} + \tilde{\varepsilon} + \cdots\right) + \cdots = x,$$

d'où

$$f = x - \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{2e^{2x}} + \frac{x}{e^{2x}} \cdots \in \mathbb{R}[\![x^{-1}; e^{-x}]\!].$$

3. On remonte :

$$e^f = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{x}{e^{2x}} + \cdots\right) \in \mathbb{R}[\![x^{-1}; e^{-x}]\!]$$

et

$$e^{e^f} = e^{e^x - x}\left(1 + \frac{x}{e^x} + \cdots\right) \in e^{e^x - x}\mathbb{R}[\![x^{-1}; e^{-x}]\!].$$

Enfin

$$(x \log x)^{inv} = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{\log \log x}{\log x} + \cdots\right).$$

IV : Une conjecture de Hardy

Définition L-fonction

Une L-fonction est une fonction construite à partir de $\mathbb{R}, x$ par $+, -, \times, /$, les fonctions algébriques, exp et log.

La conjecture de Hardy

Il n'existe pas de L-fonction f telle que

$$f \asymp (\log x \log \log x)^{inv}$$

pour $x \to \infty$.

Démonstrations données par

VdH : thése.

Macintyre, Marker, van den Dries : papier à paraître.

Nous utilisons sans preuve

- L'inverse fonctionnelle de $x \log x$ n'est pas *égal* à une L-fonction (Liouville 1838).
- Toute L-fonction est une transsérie *convergente* ainsi que l'inverse fonctionnelle de $\log x \log \log x$ (thèse).
- La partie non bornée $f^{\uparrow}$ d'une L-fonction en tant que transsérie est aussi une L-fonction (Ressayre, thèse).

La démonstration

Nous constatons d'abord que pour $f, g > 0$

$$f \asymp g \Leftrightarrow (\log f)^{\uparrow} = (\log g)^{\uparrow}.$$

Supposons que $(\log x \log\log x)^{inv}$ soit une L-fonction.
Alors il en est de même pour

$$\log(\log x \log\log x)^{inv} = (x \log x)^{inv}$$

et pour

$$[(x \log x)^{inv}]^{\uparrow}.$$

Or

$$(x \log x)^{inv} \in \frac{x}{\log x} \mathbb{R}[[\log_2^{-1} x; \log^{-1} x]],$$

donc en particulier

$$[(x \log x)^{inv}]^{\uparrow} = (x \log x)^{inv}.$$

Donc $(x \log x)^{inv}$ est une L-fonction, ce qui contredit le théorème de Liouville.

Plus généralement

Si $0 < f \succ\!\!\succ 1$ n'est pas une L-fonction, alors $\exp_r f$ n'est pas asymptotique à une L-fonction pour tout r suffisamment grand.

Exemple : $\exp \int e^{x^2}$ n'est pas asymptotique à une L-fonction.

V : Méthode de Newton

Problème 1

Étant donnée une équation polynomiale

$$P(f) = P_0 + P_1 f + \cdots + P_d f^d = 0,$$

dont les coefficients sont des séries formelles dans $C[[z]]$, où C algébriquement clos, on cherche un algorithme pour calculer les solutions dans $C\llbracket z^{\mathbb{Q}} \rrbracket$.

Problème 2

Étant donnée une équation polynomiale

$$P(f) = P_0 + P_1 f + \cdots + P_d f^d = 0,$$

dont les coefficients sont des séries formelles dans $C\llbracket \mathfrak{M} \rrbracket$, avec $\mathfrak{M}^{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{M}$, on cherche un algorithme pour calculer les solutions.

Idée

Nous allons utiliser la méthode de Newton, en incorporant une idée de Smith [1875] (et [VdH 97]).

Équation polynomiale asymptotique

$$P(f) = P_0 + P_1 f + \cdots + P_d f^d = 0 \ \ (f \prec\!\!\prec \text{ч}). \qquad (1)$$

Raffinement

Changement de variable + contrainte.

$$f = \varphi + \tilde{f} \ \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec \tilde{\text{ч}}), \text{ où } \tilde{\text{ч}} \prec\!\!\prec \text{ч}.$$

Polynôme de Newton

Soit $\text{ц} \in \text{Ц}^{\mathbb{Q}}$ un monôme avec $\text{ц} \prec\!\!\prec \text{ч}$.

Soit щ maximal pour $\succcurlyeq$ tq. $\operatorname{supp} P_i \ni \text{щ}\text{ц}^{-i}$ pour un i.

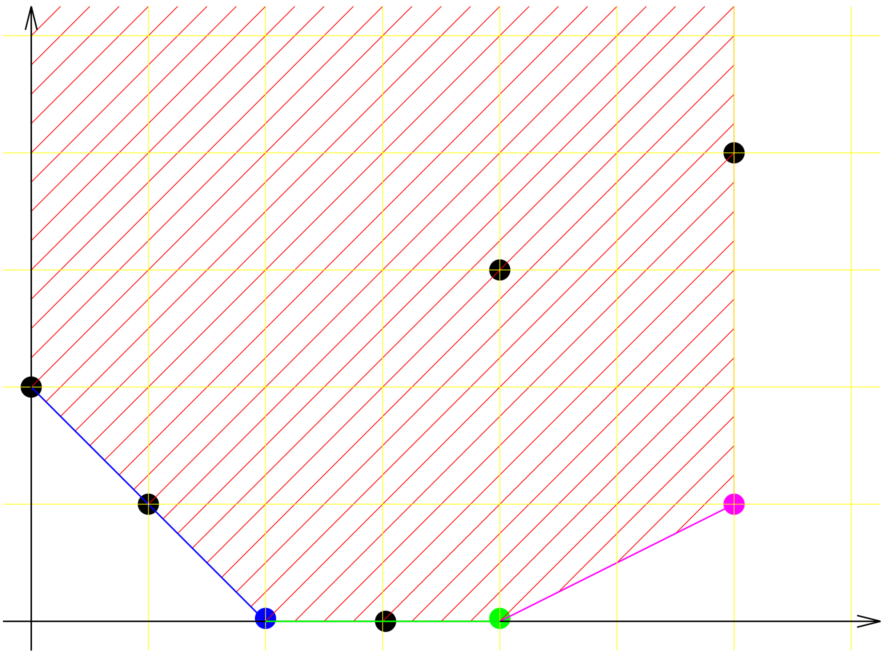
Polynôme de Newton associé à ц :

$$\text{м}_{P,\text{ц}}(c) = P_{d,\text{щ}/\text{ц}^d} c^d + \cdots + P_{0,\text{щ}}.$$

ц monôme dominant potentiel $\longleftrightarrow$ $\text{м}_{P,\text{ц}}$ admet une racine c.

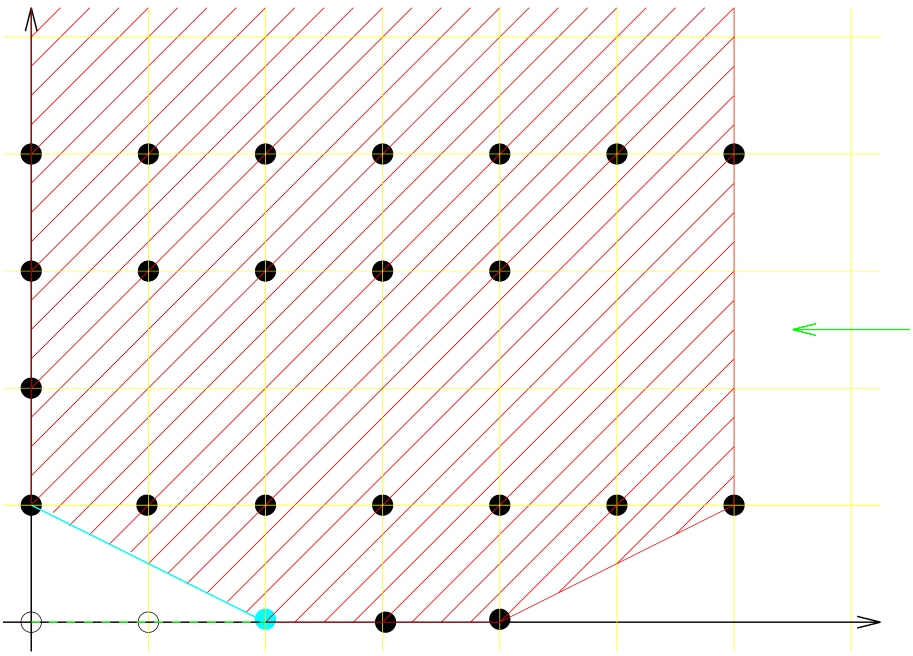
$c\text{ц}$ terme dominant potentiel dans ce cas.

f solution $\Rightarrow c_f \text{м}_f$ terme dominant potentiel.

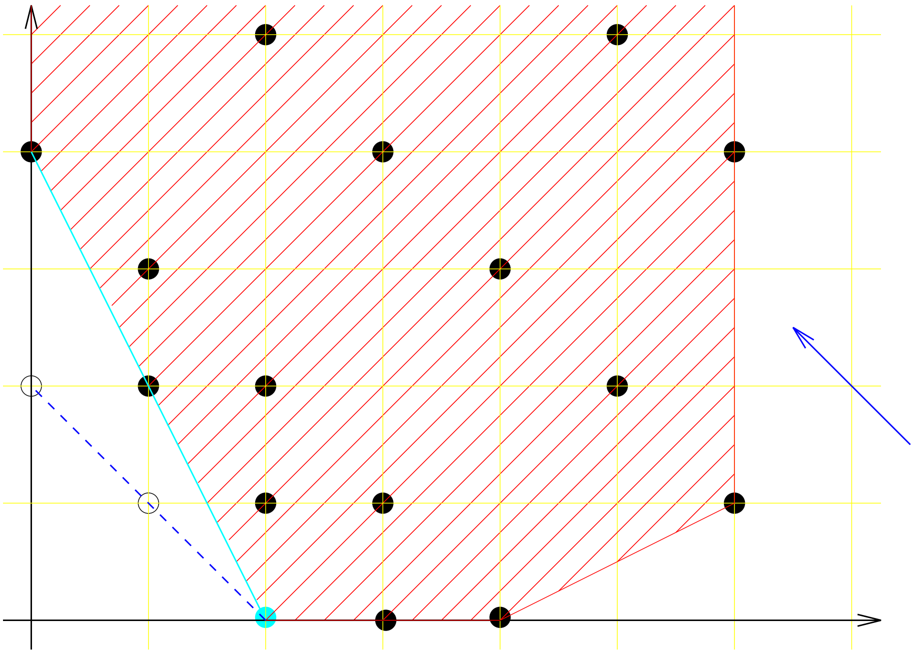


Exemple : $\quad z^2 - 2zf + f^2 - 2f^3 + (1+z^3)f^4 - (z+z^5)f^6 = 0,$

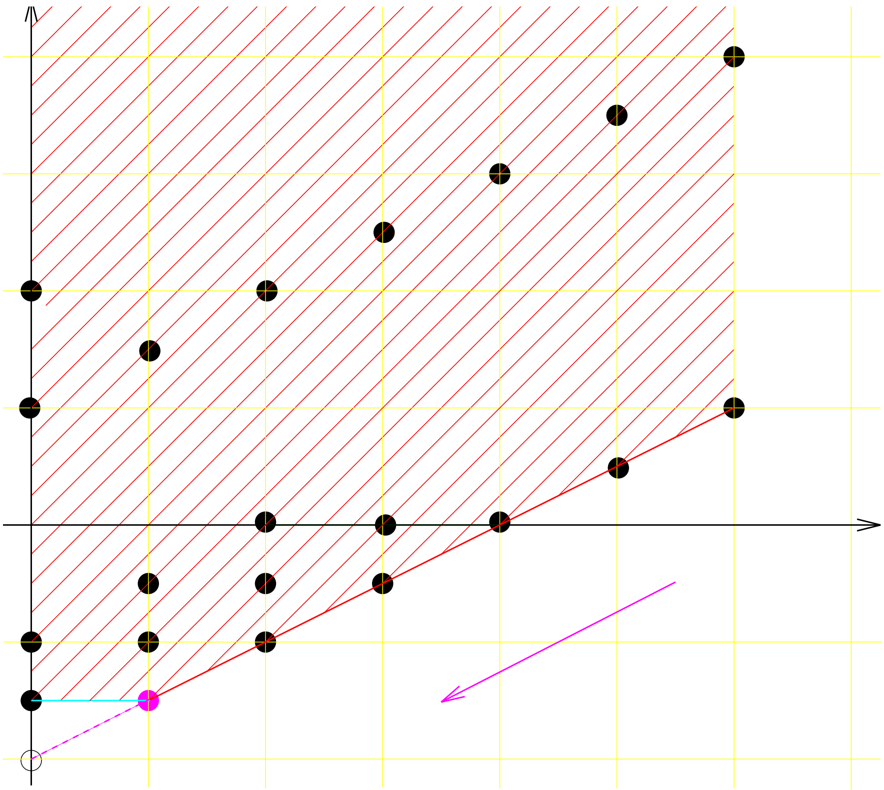
où $z \prec\!\!\!\prec 1$.



Raffinement : $f = 1 + \tilde{f} \ (\tilde{f} \prec\!\!\!\prec 1)$.



Raffinement : $f = z + \tilde{f} \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec z)$.



Raffinement : $f = z^{-1/2} + \tilde{f} \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec z^{-1/2})$.

Degré de Newton

Définition

Degré maximal du polynôme de Newton associé à un $\text{ц} \in \text{Ц}$.

Théorème. *Soit* $c\text{ц}$ *un monôme dominant potentiel de* f. *Soit*

$$\tilde{P}(\tilde{f}) = 0 \ \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec \text{ц}) \tag{2}$$

l'équation obtenue après le raffinement $f = c\text{ц} + \tilde{f}$ $(\tilde{f} \prec\!\!\prec \text{ц})$. *Alors le degré de Newton de (2) est égal à la multiplicité de* c *comme racine de* $\text{м}_{P,\text{ц}}$.

Équation quasi-linéaire

Équation dont le degré de Newton est un.

Théorème. *Une équation quasi-linéaire admet une solution unique.*

Approche de Smith "embellie"

Stagnation du degré de Newton

$$f^2 - \frac{2}{1-z} f + \frac{1}{(1-z)^2} = z^{10000}.$$

5000 étapes nécessaires avant séparation des racines.

Cas non archimédien

$$f^2 - \frac{2}{1-x^{-1}} f + \frac{1}{(1-x^{-1})^2} = e^{-x}.$$

Infinité d'étappes avant séparation des racines.

Approche de Smith "embellie"

Résoudre l'équation dérivée

$$2\varphi - \frac{2}{1-z} = 0$$

et effectuer le raffinement $f = \varphi + \tilde{f}$ $(\tilde{f} \lll 1)$; on obtient alors $\tilde{f}^2 = z^{10000}$.

Théorème. *Soit* $c\text{ц}$ *un monôme dominant potentiel de* f*, où* c *est une racine de* $\text{м}_{P,\text{ц}}$ *de multiplicité* $d = \deg \text{м}_{P,\text{ц}}$*. Alors l'équation*

$$\frac{\partial^{d-1} P}{\partial f^{d-1}} = 0 \ \ (f \prec\!\!\prec \text{ч})$$

est quasi-linéaire.

Soit φ *son unique solution et considérons les raffinements*

$$f = \varphi + \tilde{f} \ \ (\tilde{f} \prec\!\!\prec \text{ц}),$$

et

$$\tilde{f} = \psi + \tilde{\tilde{f}} \ \ (\tilde{\tilde{f}} \prec\!\!\prec \text{м}_{\psi}),$$

avec $0 \neq \psi \prec\!\!\prec \text{ц}$ *arbitraire. Alors le degré de Newton de l'équation*

$$\tilde{\tilde{P}}(\tilde{\tilde{f}}) = 0 \ \ (\tilde{\tilde{f}} \prec\!\!\prec \text{м}_{\psi}),$$

où $\tilde{\tilde{P}}(\tilde{\tilde{f}}) = 0 \Leftrightarrow P(f) = 0$ *est strictement inférieur au degré de Newton de (1).*

Algorithme. Étant donnée une équation polynomiale asymptotique (1), on calcule ses solutions.

1. Soit d le degré de Newton de (1).
   Si $f^d | P$, séparer deux cas :

   – Retourner 0.

   – Aller à 5.

2. Calculer les termes dominants potentiels $c_1 \text{ц}_1, \cdots, c_\nu \text{ц}_\nu$ de f.

3. Si $\nu = 1$ (donc c_1 est de multiplicité d), aller à 5.

4. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant \nu$, raffiner $f = c_i \text{ц}_i + \tilde{f}$ $(\tilde{f} \prec\!\!\prec \text{ц}_i)$, et résoudre récursivement l'équation réécrite en $\tilde{f}$. Collecter et retourner les solutions de (1) ainsi obtenues.

5. Soit φ l'unique solution de $P^{(d-1)}(\varphi) = 0$ $(\varphi \prec\!\!\prec \text{ч})$, raffiner $f = \varphi + \tilde{f}$ $(\tilde{f} \prec\!\!\prec \varphi)$ et résoudre récursivement l'équation réécrite en $\tilde{f}$. Retourner les solutions correspondantes à (1).