Résolution certifiée d'équations différentielles

Joris van der Hoeven

CNRS

Journée COSYNUS-MAX

Palaiseau, 27 mai 2019

Entrées :

- Application $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$ représentée par $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r]$
- Condition initiale $\boldsymbol{I} \in \mathbb{Q}^r \subseteq \mathbb{R}^r$ en $t = 0$
- Temps $T \in \mathbb{Q}^> \subseteq \mathbb{R}^>$
- Tolérance $\varepsilon \in \mathbb{Q}^>$

Sortie :

- Approximation $\tilde{\boldsymbol{y}}(T) \in \mathbb{Q}^r$ pour la solution $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_r)$ de

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{I}$$

avec $|\tilde{\boldsymbol{y}}(T) - \boldsymbol{y}(T)| < \varepsilon$

Méthodes de Runge–Kutta

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i v_i$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= f(y_n), \\
v_2 &= f(y_n + h\,(a_{2,1}\,v_1)), \\
v_3 &= f(y_n + h\,(a_{3,1}\,v_1 + a_{3,2}\,v_2)), \\
&\vdots \\
v_s &= f(y_n + h\,(a_{s,1}\,v_1 + a_{s,2}\,v_2 + \cdots + a_{s,s-1}\,v_{s-1})).
\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i v_i$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= f(y_n), \\
v_2 &= f(y_n + h\,(a_{2,1}\,v_1)), \\
v_3 &= f(y_n + h\,(a_{3,1}\,v_1 + a_{3,2}\,v_2)), \\
&\vdots \\
v_s &= f(y_n + h\,(a_{s,1}\,v_1 + a_{s,2}\,v_2 + \cdots + a_{s,s-1}\,v_{s-1})).
\end{aligned}$$

Complexité

Ordre p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
# Étapes s	1	2	3	4	6	7	9	11		16		24		34		

Certification (d'après Alexandre dS, Chapoutot)

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y) \\
y'' &= f'(y) \cdot f(y) \\
y''' &= f''(y) \cdot (f(y), f(y)) + f'(y) \cdot f'(y) \cdot f(y) \\
y'''' &= f'''(y) \cdot (f(y), f(y), f(y)) + 3 f''(y) \cdot (f'(y) \cdot f(y), f(y)) \\
&\quad + f'(y) \cdot f'(y) \cdot f'(y) \cdot f(y) \\
&\vdots \\
y^{(p+1)} &= \sum_{|T|=p+1} \alpha_T \Phi_T(y)
\end{aligned}
$$

Certification (d'après Alexandre dS, Chapoutot)

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y) \\
y'' &= f'(y)\cdot f(y) \\
y''' &= f''(y)\cdot(f(y),f(y)) + f'(y)\cdot f'(y)\cdot f(y) \\
y'''' &= f'''(y)\cdot(f(y),f(y),f(y)) + 3f''(y)\cdot(f'(y)\cdot f(y),f(y)) \\
&\quad + f'(y)\cdot f'(y)\cdot f'(y)\cdot f(y) \\
&\vdots \\
y^{(p+1)} &= \sum_{|T|=p+1} \alpha_T \Phi_T(y)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{y}(h) - y(h) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{|T|=p+1} \beta_T \Psi_T(y)(\xi), \qquad \xi \in [0,h]
$$

Certification (d'après Alexandre dS, Chapoutot)

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y) \\
y'' &= f'(y)\cdot f(y) \\
y''' &= f''(y)\cdot(f(y),f(y)) + f'(y)\cdot f'(y)\cdot f(y) \\
y'''' &= f'''(y)\cdot(f(y),f(y),f(y)) + 3f''(y)\cdot(f'(y)\cdot f(y),f(y)) \\
&\quad + f'(y)\cdot f'(y)\cdot f'(y)\cdot f(y) \\
&\vdots \\
y^{(p+1)} &= \sum_{|T|=p+1} \alpha_T \Phi_T(y)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{y}(h) - y(h) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{|T|=p+1} \beta_T \Psi_T(y)(\xi), \qquad \xi \in [0,h]
$$

Complexité : exponentielle en p

Méthodes par séries de Taylor

$$y' = f(y)$$

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y) \\
&\Big\downarrow \\
y_k &= \frac{1}{k} f(y)_{k-1}
\end{aligned}
$$

Méthodes par séries de Taylor

$$y' = f(y)$$

$$\downarrow$$

$$y_k = \frac{1}{k} f(y)_{k-1}$$

$$y(h) = y_0 + y_1 h + \cdots + y_{n-1} h^{n-1} + O(h^n)$$

Méthodes par séries de Taylor

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y) \\
&\downarrow \\
y_k &= \frac{1}{k} f(y)_{k-1} \\
y(h) &= y_0 + y_1 h + \cdots + y_{n-1} h^{n-1} + O(h^n)
\end{aligned}
$$

Complexité (grossière)

- un pas : $\approx$ calcul $\mathsf{C}(n)$ d'une solution en série à l'ordre n

$$
\begin{aligned}
y' &= f(y) \\
&\downarrow \\
y_k &= \frac{1}{k} f(y)_{k-1} \\
y(h) &= y_0 + y_1 h + \cdots + y_{n-1} h^{n-1} + O(h^n)
\end{aligned}
$$

Complexité (grossière)

- un pas : $\approx$ calcul $\mathsf{C}(n)$ d'une solution en série à l'ordre n
- pour une précision de $p = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ bits :

$$\frac{T}{h}\mathsf{C}(n) \asymp \frac{T}{\varepsilon^{1/n}}\mathsf{C}(n) \asymp T\,2^{\frac{p}{n}}\mathsf{C}(n)$$

$$y' = f(y)$$
$$\downarrow$$
$$y_k = \frac{1}{k} f(y)_{k-1}$$
$$y(h) = y_0 + y_1 h + \cdots + y_{n-1} h^{n-1} + O(h^n)$$

Complexité (grossière)

- un pas : $\approx$ calcul $\mathsf{C}(n)$ d'une solution en série à l'ordre n
- pour une précision de $p = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ bits :

$$\frac{T}{h} \mathsf{C}(n) \asymp \frac{T}{\varepsilon^{1/n}} \mathsf{C}(n) \asymp T 2^{\frac{p}{n}} \mathsf{C}(n)$$

- ce qui donne $O(T\,\mathsf{C}(p))$ pour $n \asymp p$

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1								
$(y^2)_k$									
$(2y-y^2)_k$									

1								
$\times$	1							

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1								
$(y^2)_k$	1								
$(2y-y^2)_k$									

1	1							
×	1							

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1								
$(y^2)_k$	1								
$(2y - y^2)_k$	1								

1	1							
$\times$	1							

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1							
$(y^2)_k$	1								
$(2y-y^2)_k$	1								

1								
1	1							
×	1	1						

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1							
$(y^2)_k$	1	2							
$(2y-y^2)_k$	1								

1	1							
1	1	1						
×	1	1						

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1							
$(y^2)_k$	1	2							
$(2y-y^2)_k$	1	0							

1	1							
1	1	1						
×	1	1						

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0						
$(y^2)_k$	1	2							
$(2y - y^2)_k$	1	0							

0								
1	1							
1	1	1						
$\times$	1	1	0					

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0						
$(y^2)_k$	1	2	1						
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1						

0	0							
1	1	1						
1	1	1	0					
$\times$	1	1	0					

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$					
$(y^2)_k$	1	2	1						
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1						

$-\frac{1}{3}$								
0	0							
1	1	1						
1	1	1	0					
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$					
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$					
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1	0					

$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$							
0	0	0						
1	1	1	0					
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0				
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$					
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1	0					

0								
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$							
0	0	0						
1	1	1	0					
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$			
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$				
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1	0	$\frac{2}{3}$				

$\frac{2}{15}$								
0	0							
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$						
0	0	0	0					
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$		

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0		
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$			
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	0			

0								
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$							
0	0	0						
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0					
0	0	0	0	0				
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$		
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$	
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{17}{45}$		
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-17}{45}$		

$\frac{-17}{315}$								
0	0							
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$						
0	0	0	0					
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$				
0	0	0	0	0	0			
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$		
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$	0
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{17}{45}$	$\frac{-34}{315}$	
$(2y-y^2)_k$	1	0	−1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-17}{45}$	0	

$\frac{-17}{315}$	$\frac{-17}{315}$							
0	0	0						
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	0					
0	0	0	0	0				
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0			
0	0	0	0	0	0	0		
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$

Résolution paresseuse

$$y' = 2y - y^2, \qquad y(0) = 1$$

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$	0
$(y^2)_k$	1	2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{17}{45}$	$\frac{-34}{315}$	
$(2y-y^2)_k$	1	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-17}{45}$	0	

$\frac{-17}{315}$	$\frac{-17}{315}$							
0	0	0						
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	0					
0	0	0	0	0				
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0			
0	0	0	0	0	0	0		
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$

Complexité : $\mathsf{C}(n) = O(n^2 p \log p)$

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

1								
×	1							

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

1								
1	1							
×	1	1						

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

0								
1	1							
1	1	1						
×	1	1	0					

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

$-\frac{1}{3}$								
0	0	0	0					
1	1	1	0					
1	1	1	0					
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

0								
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$							
0	0	0	0					
1	1	1	0					
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$				
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			

Résolution détendue

$$y \;=\; 1 + \int (2y - y^2)$$

$\frac{2}{15}$								
0	0	0	0					
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0					
0	0	0	0	0	0			
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$		

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

0								
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$							
0	0	0	0					
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0					
0	0	0	0	0	0			
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0			
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$		
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

$\frac{-17}{315}$								
0	0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-2}{45}$	0	$\frac{4}{225}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{-2}{45}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
$\times$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$

Résolution détendue

$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

$\frac{-17}{315}$	$\frac{-17}{315}$							
0	0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-2}{45}$	0	$\frac{4}{225}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{-2}{45}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$
×	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$

Résolution détendue

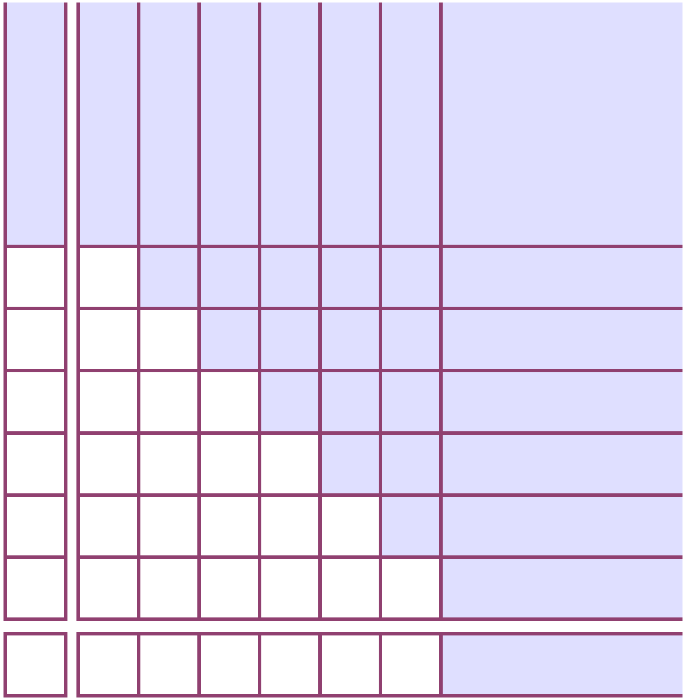
$$y = 1 + \int (2y - y^2)$$

$\frac{-17}{315}$	$\frac{-17}{315}$							
0	0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-2}{45}$	0	$\frac{4}{225}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{-2}{45}$	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	
1	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$
×	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{-17}{315}$

Complexité : $\mathsf{C}(n) = O(n\, p \log p \log p)$

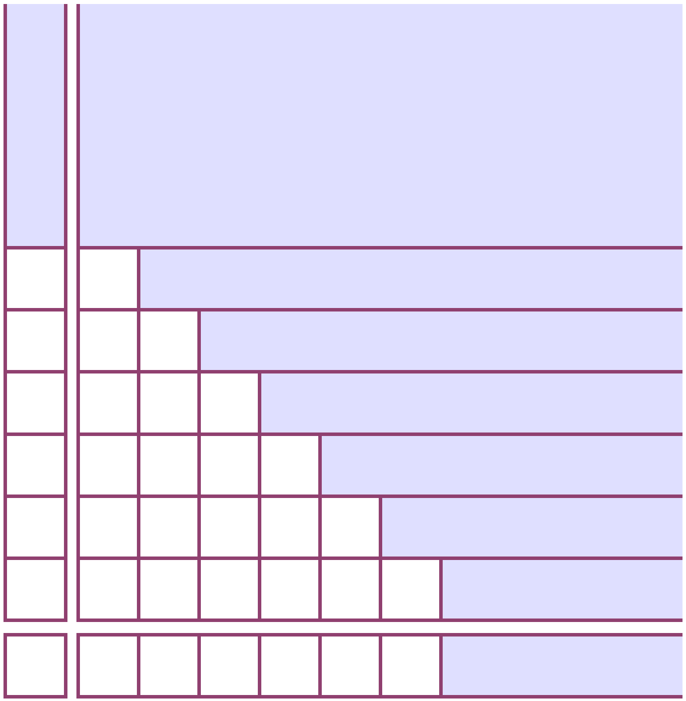
Certification

Idée : pour tout série a intervenant dans le calcul,
calculer $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et $[\![a]\!]_n$ avec $\|a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\| \leqslant [\![a]\!]_n$



Certification

Idée : pour tout série a intervenant dans le calcul,
calculer $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et $[\![a]\!]_n$ avec $\|a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\| \leqslant [\![a]\!]_n$



Complexité : $O(n\,p\log p)$, voire $O(n)$

Qualité des bornes d'erreur

« Trade-off »

calcul plus efficace →

← bornes plus précices

« Trade-off »

calcul plus efficace $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ bornes plus précices

Arithmétique affine

Calculer dépendence de $\boldsymbol{y}(t_2)$ en fonction de $\boldsymbol{y}(t_1)$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t_2) = \boldsymbol{J}_{t_1 \to t_2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{y}(t_1)$$

$\rightsquigarrow$ réduit l'« effet d'enveloppement »

Qualité des bornes d'erreur

« Trade-off »

calcul plus efficace →

← bornes plus précices

Arithmétique affine

Calculer dépendence de $\boldsymbol{y}(t_2)$ en fonction de $\boldsymbol{y}(t_1)$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t_2) = J_{t_1 \to t_2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{y}(t_1)$$

$\rightsquigarrow$ réduit l'« effet d'enveloppement »

Stratégie dichotomique

$$J_{t_1 \to t_3} = J_{t_2 \to t_3} \cdot J_{t_1 \to t_2} \qquad \text{(récursivement)}$$

$\rightsquigarrow$ réduit encore plus l'« effet d'enveloppement »

$\rightsquigarrow$ certification et résolution au delà d'une précision p_0 se parallèlisent

(avec Grégoire LECERF)

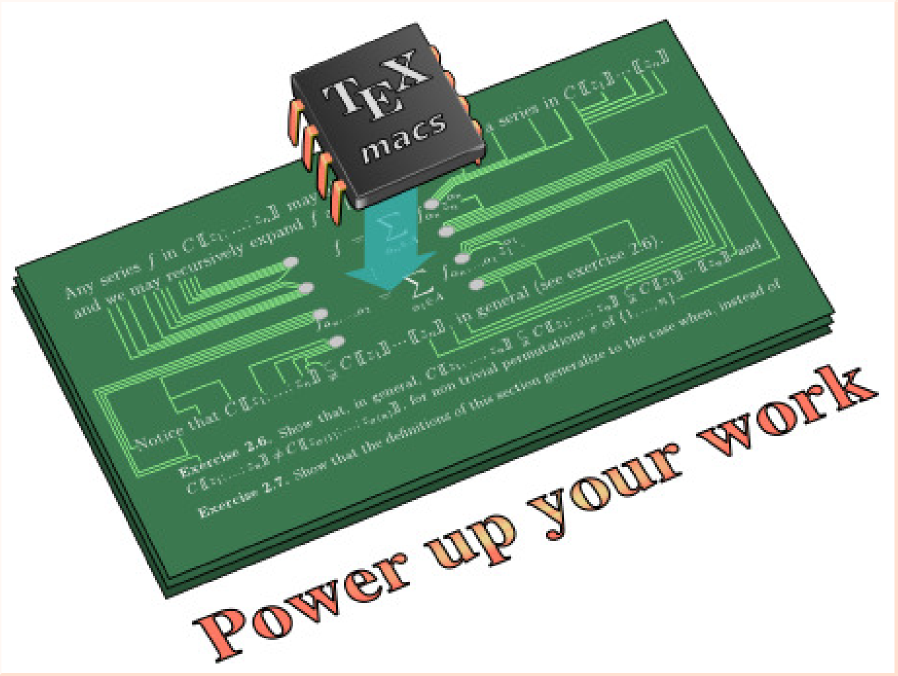
Question : comment évaluer f efficacement utilisant une arithmétique d'intervalles $(\boldsymbol{x} = [x_{\text{lo}}, x_{\text{hi}}])$ ou de boules $(\boldsymbol{x} = \mathcal{B}(x_c, x_r))$?

Idée : utiliser une arithmétique de boules « transitoire »

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(a,r)+\mathcal{B}(b,s) &:= \mathcal{B}(a+b, r+s)\\
\mathcal{B}(a,r)-\mathcal{B}(b,s) &:= \mathcal{B}(a-b, r+s)\\
\mathcal{B}(a,r)\times\mathcal{B}(b,s) &:= \mathcal{B}(a\times b, [(\|a\|+r)\times s+\|b\|\times r])
\end{aligned}$$

Théorème : pour une fonction f donnée (par un DAG), et en gonflant légèrement les rayons des entrées, on montre que cette arithmétique produit un encadrement correct $\rightsquigarrow$ supprime la nécessité d'estimer les erreurs d'arrondi en cours de route.

Merci !



http://www.TEXMACS.org