Chapitre 1
Transséries fortement monotones

1.1 Introduction

La théorie des transséries fortement monotones se propose principalement de modéliser algébriquement le comportement asymptotique à l'infini de fonctions réelles, qui ne font pas intervenir de l'oscillation. Ici, on se restreint aux "fonctions réelles d'origine naturelle", comme des solutions d'équations différentielles à coefficients explicits ou encore des solutions à des équations fonctionnelles.

Classiquement, dans l'étude d'équations différentielles, on pourrait assimiler des fonctions fortement monotones à des éléments d'un corps de Hardy. Plus généralement, pour des équations fonctionnelles, on pourrait considérer des corps de Hardy stables par composition. Des exemples moins classiques de structures ayant un goût "fortement monotone" sont des corps de transséries et des structures o-minimales, même ces structures n'ont pas vocation à modéliser des germes de fonctions réelles à l'infini.

En fait, pour conserver une flexibilité optimale, il convient de ne pas chercher à accorder un sens trop précis à l'adjectif "fortement monotone", mais au contraire, d'en trouver les différentes manifestations et de les étudier avec soin. Cette démarche m'a amené à distinguer les principaux cadres suivants, par ordre croissant de généralité :

Type d'équations	Exemple	Transséries
différentielles	$f' = e^{-e^x} + f^2$	réticulées
fonctionnelles modérées	$f(x) = \frac{1}{x} + f(x^2) + f(e^{\log^2 x})$	bien ordonnées
de composition	$\log \circ f \circ (x+1) \circ f^{-1} = x$	de forces supérieures
fonctionnelles générales	$f(x) = e^{\sqrt{x} + f(\log x)}$	imbriquées

Le premier cadre sera traité avec plus de détails dans le prochain chapitre. Dans ce chapitre je présenterai les progrès récents concernant les autres cadres, qui sont dus en grande partie à une collaboration avec mon étudiant en thèse M. Schmeling (soutenance prévue cette année). Pour chaque cadre, notre démarche générale se résume ainsi :

- Dégager une axiomatique pour les corps de transséries.
- Construire des corps transséries possédant le plus de structure supplémentaire possible (dérivation, composition).
- Trouver un mécanisme pour la résolution d'équations fonctionnelles.
- Faire le pont entre la théorie algébrique des transséries et l'analyse.

1.1.1 Axiomatique pour les transséries

Un corps totalement ordonné de séries généralisées est un corps de la forme $C[[\mathfrak{M}]]$, où C est un corps totalement ordonné quelconque, $\mathfrak{M}$ un groupe de monômes totalement ordonné par $\succcurlyeq$, et $C[[\mathfrak{M}]]$ l'ensemble des sommes

$$f = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} f_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m},$$

dont le support $\operatorname{supp} f = \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M} | f_{\mathfrak{m}} \neq 0\}$ est bien ordonné. Intuitivement, un corps de transséries $\mathbb{T}$ est un corps totalement ordonné de séries généralisées sur lequel on a (partiellement) défini d'autres fonctions, dont l'exponentielle. La difficulté de l'axiomatisation précise réside dans les questions suivantes :

- Quelles fonctions convient-il d'ajouter à la signature de $\mathbb{T}$, pour pouvoir résoudre le plus d'équations possibles ?
- Quelles sont les conditions de compatibilité de la structure fonctionnelle et la structure sérielle de $\mathbb{T}$?

La réponse à la première question dépend principalement du cadre dans lequel on se place. De manière générale, il s'avère que l'on a besoin d'ajouter que très peu de fonctions à la signature en comparaison avec la généralité des équations dont on se propose la résolution. Les difficultés principales de la seconde question sont la caractérisation des transmonômes et l'axiome de "bonne imbrication", essentiel pour la définition d'une dérivation et une composition sur $\mathbb{T}$.

1.1.2 Résolution d'équations différentielles et fonctionnelles

La résolution des équations différentielles et fonctionnelles dans les transséries s'appuie sur une généralisation de la méthode des polygones de Newton. Différents types de résultats peuvent êtres distingués :

- Une procédure théorique pour trouver toutes les solutions, et, éventuellement, les avoir sous forme paramétrée (voir chapitre 2).
- Trouver des solutions sous forme de "transséries intégrales" (voir chapitre 2), ou plus généralement sous forme de "transséries fonctionnelles".
- Des théorèmes de valeurs intermédiaires : si $\Phi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est une fonctionnelle et $f < g$ des transséries dans $\mathbb{T}$ avec $\Phi(f) < 0$ et $\Phi(g) > 0$, alors il existe un $h \in \,]f, g[$, avec $\Phi(h) = 0$.
- Des théorèmes de modélisation (voir la section 1.1.3).

1.1.3 Lien entre les transséries et l'analyse

On peut faire le pont entre les transséries et l'analyse d'au moins deux façons :

1. Étant donné un ensemble $T \subseteq \mathbb{T}$ de transséries, issue d'un problème naturel, comment interpréter les éléments de T comme des germes de fonctions réelles à l'infini ? En autres mots, désignant par $\mathcal{G}$ l'anneau des germes de fonctions réelles infiniment dérivables à l'infini, comment construire un monomorphisme $\varphi\colon T \to \mathcal{G}$, qui préserve le plus de structure possible (comme la dérivation et la composition) ?

2. Étant donné un ensemble $G \subseteq \mathcal{G}$ de germes à l'infini, comment modéliser G par un ensemble de transséries ? En d'autres termes, comment construire un monomorphisme $\psi: G \to \mathbb{T}$ qui préserve le plus de structure possible ?

La première question peut être traitée à l'aide de la théorie d'accéléro-sommation d'Écalle, et, je l'espère, par une "théorie des jauges" (voir le chapitre 2).

La seconde question, qui a été moins étudiée, est intéressante pour au moins deux raisons : des théorèmes de représentation sont une autre forme de théorèmes de résolution d'équations fonctionnelles dans les transséries (toute équation fonctionnelle vérifiée par une fonction $f \in G$ est vérifiée par $\psi(f)$). Deuxièmement, modulo ce genre de théorèmes, on obtient des modèles algébriques concrets de corps ordonnés avec une structure supplémentaire, comme les corps de Hardy. Ceci pourrait entre autres avoir des applications dans la théorie de l'o-minimalité.

1.2 Transséries bien ordonnées

Un corps de transséries bien ordonnées au sens classique est un corps totalement ordonné $\mathbb{T} = C[[\mathfrak{M}]]$ de séries généralisées, avec une fonction exponentielle partielle. L'axiomatisation précise se décompose en l'axiomatisation de corps totalement ordonnés avec une fonction exponentielle, et l'établissement des axiomes de compatibilité entre la fonction exponentielle et la sommation infinie.

1.2.1 Fonctions exponentielles

Quels axiomes modélisent convenablement une fonction exponentielle (partielle) sur un corps totalement ordonné ? Pour ce qui est de la compatibilité avec la strucure de corps, il est naturel de demander que

E1. $\exp 0 = 1$.

E2. $\exp y = \exp(y - x) \exp x$, pour tout $x, y \in \operatorname{dom} \exp$.

La compatibilité avec l'ordre est plus délicate. Idéalement, on aimerait que les axiomes de la fonction exponentielle modélisent la théorie de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. Un tel système d'axiomes n'est pas connu actuellement, mais l'axiome supplémentaire suivant, dû à Dahn et Wolter, me semble un bon candidat :

E3. $\exp x \geqslant 1 + x + \cdots + x^{2n-1}/(2n-1)!$, pour tout $x \in \operatorname{dom} \exp$ et $n \in \mathbb{N}$.

En effet, modulo la conjecture de Schanuel, j'ai démontré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction f réélle analytique en $c \in \mathbb{R}$, définie à partir de l'exponentielle, il existe une fraction rationnelle g, dont le développement en série de Taylor coincide avec celui de f à l'ordre n en c, et telle que les axiomes **E1**, **E2** et **E3** entraînent $f \leqslant g$ au voisinage de c. Par compacité, toute relation du genre $f \geqslant 0$ sur un compact se déduit donc des axiomes. Avec un peu plus de difficulté, je pense que ceci se généralise pour des ensembles définissables quelconques.

1.2.2 Corps de transséries classiques

Les axiomes de compatibilité entre une fonction exponentielle partielle et la structure sérielle d'un corps de transséries s'expriment le plus facilement en fonction du logarithme :

T1. $\operatorname{dom} \log = \mathbb{T}^{+}$.

T2. $\log(1+\varepsilon)=l\circ\varepsilon$, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{T}^{\downarrow}$, où $l=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\in C[[z]]$.

T3. Pour $f\in\mathbb{T}^{+}$, on a $f\in\mathfrak{M}\Leftrightarrow\ \log\mathfrak{m}\in\mathbb{T}^{\uparrow}$.

T4. Soit $\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\ldots$ une suite de monômes, avec $\mathfrak{m}_{i+1}\in\operatorname{supp}\log\mathfrak{m}_i$ pour tout i. Alors $(\log\mathfrak{m}_i)_{\mathfrak{m}_{i+1}}=\pm1$ et $\mathfrak{n}\in\operatorname{supp}\log\mathfrak{m}_i\Rightarrow\mathfrak{n}\succcurlyeq\mathfrak{m}_{i+1}$, pour tout i suffisamment grand.

Ici $\mathbb{T}^{\uparrow}=\{f\in\mathbb{T}|\forall\mathfrak{m}\in\operatorname{supp}f,\mathfrak{m}\succ1\}$ désigne l'ensemble de toutes les transséries à support infiniment grand. L'axiome **T2** exprime le fait que le logarithme se développe par la formule de Taylor autour de 1. L'axiome **T3** caractérise les monômes dans $\mathfrak{M}$ en fonction de l'exponentielle.

L'axiome **T4** est plus subtil. Par exemple, il existe des corps de transséries qui contiennent des transséries imbriquées (voir aussi la section 1.4) comme

$$f=e^{\sqrt{x}+e^{\sqrt{\log x}+e^{\sqrt{\log\log x}+\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

Une telle transsérie intervient naturellement comme solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x)=e^{\sqrt{x}+f(\log x)}. \tag{1.1}$$

En revanche, l'axiome **T4** écarte des “transséries mal imbriquées” comme

$$g=e^{\sqrt{x}+e^{\sqrt{\log x}+e^{\sqrt{\log\log x}+\cdot^{\cdot^{\cdot}}\cdot_{\cdot_{\cdot}}+\log\log\log x}+\log\log x}+\log x}.$$

Ceci est d'abord souhaitable lorsque l'on veut définir des dérivations sur des corps de transséries. Par ailleurs, les solutions à l'équation fonctionnelle

$$g(x)=e^{\sqrt{x}+g(\log x)+\log x}.$$

s'expriment en fonction des solutions de (1.1).

Remarque 1.1. L'axiome **T1** préconise que $\log f$ est défini pour tout $f>0$. Ceci est très commode lors de la construction de corps de transséries, mais on pourrait envisager des corps de transséries dans lesquels cette condition est violée.

Remarque 1.2. On pourrait également chercher à affaiblir la caractérisation des transmonômes par la condition **T3**. Toutefois, je pense que les exceptions à la règle devraient être “finiment engendrées”.

1.2.3 Construction des corps de transséries classiques

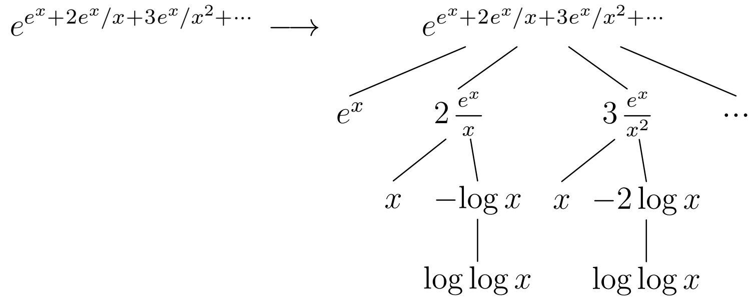
Les théorèmes principaux pour construire des corps de transséries classiques sont les suivants :

Théorème 1.3. *Soit C et corps exp-log totalement ordonné. Alors $\mathbb{L}=C[[x^C\log^C x\cdots]]$ est un corps de transséries, dit corps des transséries logarithmiques.*

Théorème 1.4. *Soit $\mathbb{T}$ un corps de transséries. Alors il en est de même pour son extension exponentielle $\mathbb{T}_{\exp}=C[[\exp\mathbb{T}^{\uparrow}]]$.*

Théorème 1.5. *Soit* $(\mathbb{T}_\alpha) = (C[[\mathfrak{M}_\alpha]])$ *une suite croissante de corps de transséries. Alors* $C[[\bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha]]$ *est également un corps de transséries.*

En appliquant les deux derniers théorèmes itérativement et de façon alternée sur un corps de transséries $\mathbb{T}$ donné, on construit sa clôture exponentielle $\hat{\mathbb{T}}$. Cependant, pour que ce processus termine, il faut prendre la précaution supplémentaire de borner la cardinalité des supports des transséries. Pour démontrer la terminaison, on représentera alors les termes dans $C\,\mathfrak{M}$ par des arbres



et on bornera la cardinalité des arbres qui peuvent apparaître ainsi. En particulier, tout ceci s'applique pour la construction du plus petit corps non trivial de transséries stable par exponentiation $C[[[x]]] = \hat{\mathbb{L}}$.

1.2.4 Opérations sur les transséries

Les représentations en arbres servent aussi pour munir des corps de transséries de structure supplémentaire. Nous avons récemment généralisé les constructions d'une dérivation et d'une composition sur $C[[[x]]]$ à des corps de transséries quelconques. Ceci donne des résultats du genre

Théorème 1.6. *Soit d une dérivation sur un corps de transséries $\mathbb{T}$. Alors il existe une unique extension de d en une dérivation $\hat{d}$ sur $\hat{\mathbb{T}}$.*

Théorème 1.7. *Soit $\delta: \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ un opérateur de postcomposition entre deux corps de transséries $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$. Alors il existe une unique extension de δ en un opérateur de postcomposition $\hat{\delta}: \hat{\mathbb{T}}_1 \rightarrow \hat{\mathbb{T}}_2$.*

Ici, il faut évidemment préciser ce que l'on entend par dérivation ou opérateur de postcomposition. On exigera par exemple que ces opérateurs préservent la sommation infinie et qu'ils vérifient $de^f = (df)\, e^f$ resp. $\delta e^f = e^{\delta f}$, pour tout $e^f \in \mathbb{T}$.

1.2.5 Résolution d'équations fonctionnelles

Dans ma thèse, j'ai donné une procédure théorique pour résoudre des équations différentielles algébriques dans le corps des transséries en x de "profondeurs logarithmiques et exponentielles" finies. Ceci entraîne de façon assez élémentaire un théorème de valeurs intermédiaires. J'ai vérifié que la théorie se généralise aux équations différentielles aux différences, où les opérateurs aux différences sont des postcompositions par des transséries d'exponentialité zéro (c.à.d. des transséries f, telles que $\log_n \circ f \circ \exp_n \sim x$ pour n suffisamment grand).

1.3 Transséries de forces supérieures

Considérons l'équation d'itération

$$\exp_\omega(x+1) = e^{\exp_\omega x}. \tag{1.2}$$

Toute solution fortement monotone à cette équation croît plus vite que n'importe quelle exponentielle itérée pour $x \to \infty$. On ne peut donc pas résoudre cette équation dans des corps de transséries classiques, c.à.d. construits à partir de x par les opérations de corps, la sommation infinie, l'exponentielle et le logarithme.

Afin de résoudre des équations de composition du genre

$$g_1 \circ f^{\circ n_1} \circ g_2 \circ \cdots \circ g_{k-1} \circ f^{\circ n_{k-1}} \circ g_k = x, \ \ (g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{T}, n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{Z}), \tag{1.3}$$

il est donc impératif d'adjoindre l'itérateur $\exp_\omega$ de l'exponentielle à la signature de $\mathbb{T}$, ainsi que les itérateurs $\exp_{\omega^n}$ de forces $n \geqslant 2$ supérieures. Ces itérateurs de forces supérieures sont définis par récurrence :

$$\exp_{\omega^n}(x+1) = \exp_{\omega^{n-1}} \exp_{\omega^n} x. \tag{1.4}$$

Plusieurs question se posent dès lors :

- Quelle est la légitimité des symboles $\exp_\omega, \exp_{\omega^2}, \ldots$: existe-t-il des solutions réelles analytiques fortement monotones aux équations (1.2) et (1.4) ; existe-t-il des solutions fortement monotones ?
- Comment axiomatiser et construire des corps de transséries, stables par différentiation et composition, et contenant les $\exp_{\omega^n}$?
- Faut-il adjoindre d'autre types d'itérateurs pour résoudre des équations de compositions plus générales comme (1.3) ?

1.3.1 Itérateurs réels analytiques de l'exponentielle

L'existence d'itérateurs réels analytiques de l'exponentielle fut démontrée en 1943 par Kneser. Il s'ensuit directement qu'il existe également des itérateurs réels analytiques de forces $n \geqslant 2$. Par exemple, dans le cas où $n = 2$, on peut toujours s'arranger pour que $\exp_\omega$ admette un point fixe, puisque $\exp_\omega(x + \lambda)$ est solution de (1.2) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\exp_\omega$ est solution. Maintenant on résoud l'équation fonctionnelle $\exp_{\omega^2}(x+1) = \exp_\omega(\exp_{\omega^2} x)$ autour du point fixe et on prolonge par l'équation fonctionnelle même. La question si tout itérateur réel analytique de exp admet un itérateur réel analytique reste ouverte ; l'existence d'itérateurs quasi-analytiques a été démontrée par M. Écalle.

En revanche, il est probable qu'il n'y ait pas d'itérateur fortement monotone privilégié de l'exponentielle. En effet, lorsque $\exp_\omega$ est une solution de (1.2), toute fonction de la forme

$$\widehat{\exp}_\omega = \exp_\omega \circ (x + \varphi), \quad \varphi \text{ périodique de période } 1$$

est également solution. De plus, si $\exp_\omega$ est fortement monotone (par exemple, si $\exp_\omega$ appartient à un corps de Hardy, ce qui est automatiquement le cas lorsque $\exp_\omega$ est asymptotiquement monotone), il en est de même pour $\widehat{\exp}_\omega$, pour tout φ suffisamment petit, et il n'y a actuellement pas de moyen de privilégier $\exp_\omega$ ou $\widehat{\exp}_\omega$ sur des critères purement locaux à l'infini. En tout cas, l'existence même d'un corps de transséries contenant $\exp_\omega$ et stable par composition et différentiation (voir sections 1.3.2 et 1.3.3), montre qu'un tel critère ne peut pas exclusivement être fondé sur des considérations compositionello-différentielles.

1.3.2 Transséries de forces supérieures

Ayant vérifié que des itérateurs de l'exponentielle existent bel et bien en analyse, il s'agit ensuite d'axiomatiser et de construire des corps de transséries de forces supérieures, c.à.d. des corps de transséries formels sur lesquels $\exp_\omega, \exp_{\omega^2}, \ldots$ et leurs inverses $\log_\omega, \log_{\omega^2}, \ldots$ sont (partiellement) définis.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un corps de transséries de force n est un corps de transséries $\mathbb{T}$ de force $n-1$, avec des fonctions partielles $\log_{\omega^n}, \log'_{\omega^n}, \ldots \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, qui vérifient les axiomes suivants (à comparer avec les axiomes **T1**, **T2**, **T3** et **T4** de la section 1.2.2) :

T1$_n$. $\operatorname{dom} \log_{\omega^n} = \operatorname{dom} \log'_{\omega^n} = \cdots = \mathbb{T}^+_\infty$;

T2$_n$. Pour tout $f \in \mathbb{T}^+_\infty$ et $\delta \in \mathbb{T}$ avec $\varepsilon \prec f$, on a

$$\log_{\omega^n}(f + \delta) = \log_{\omega^n} f + (\log'_{\omega^n} f)\, \delta + \tfrac{1}{2}\, (\log''_{\omega^n} f)\, \delta^2 + \cdots;$$

T3$_n$. Soit $f \in \mathbb{T}^+_\infty$. Alors $f \in \mathfrak{M}$, si pour tout $\mathfrak{m} \in \operatorname{supp} (\log_{\omega^n} f)^\downarrow$, on a

$$\mathfrak{m} \prec\!\!\!\prec f \log'_{\omega^n} f;$$

T4$_n$. Soit $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ une suite de monômes telle que

- $\mathfrak{m}_{i+1} \in \operatorname{supp} \log_{\omega^{k_i}} \mathfrak{m}_i$, avec $k_i \leqslant n$, pour tout i ;
- $\log_\alpha \mathfrak{m}_i \in \mathfrak{M}$, pour tout ordinal $\alpha < \omega^{k_i}$.

Alors $(\log_{\omega^{k_i}} \mathfrak{m}_i)_{\mathfrak{m}_{i+1}} = \pm 1$ et $\mathfrak{n} \in \operatorname{supp} \log_{\omega^{k_i}} \mathfrak{m}_i \Rightarrow \mathfrak{n} \succcurlyeq \mathfrak{m}_{i+1}$, pour tout i suffisamment grand.

Ici, nous avons adopté la notation ordinale : pour chaque $\alpha = \omega^n\, \alpha_n + \cdots + \alpha_0$,

$$\log_\alpha = \log_{\alpha_0} \circ \cdots \circ \log_{\omega^n \alpha_n} = \log^{\circ \alpha_0} \circ \cdots \circ \log_{\omega_n}^{\circ \alpha_n}.$$

Par ailleurs, les dérivées successives $\log'_{\omega^n}, \log''_{\omega^n}, \ldots$ de $\log_{\omega^n}$ sont en fait définies comme les précompositions à gauche par les transséries $\log'_{\omega^n} x, \log''_{\omega^n} x, \ldots$ de force $n-1$: pour tout ordinal β, on a

$$\begin{aligned} \log'_\beta x &= \prod_{\alpha < \beta} \frac{1}{\log_\alpha x}; \\ \log''_\beta x &= -\left(\sum_{\alpha < \beta} \log'_\alpha x \right) \log'_\beta x; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Remarque 1.8. La condition $\mathbf{T3}_n$ n'est plus une caractérisation des monômes dans $\mathfrak{M}$ en fonction de $\log_{\omega^n}$, mais seulement une condition suffisante pour qu'une transsérie soit un monôme. En fait, les monômes qui vérifient cette condition jouent un rôle important dans la construction des corps de transséries de forces supérieures.

Par ailleurs, la condition sur f est vérifiée en particulier lorsque $\log_{\omega^n} f \in \mathbb{T}^{\uparrow}$, mais ceci n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple $f = \exp_\omega (x + \frac{1}{x})$. On notera enfin que si la condition est vérifiée par un certain f, elle le sera également par $\log_\alpha f$ et $\exp_\alpha f$, pour tout $\alpha < \omega^n$.

1.3.3 Construction des corps de transséries généralisées

La construction des corps de transséries de forces supérieures se fait par des théorèmes analogues aux théorèmes 1.3, 1.4 et 1.5 :

Théorème 1.9. *Soit C et corps exp-log totalement ordonné et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{L}_n = C[[\prod_{\alpha < \omega^{n+1}} \log_\alpha^{\lambda_\alpha} x]]$ est un corps de transséries de force n.*

Théorème 1.10. *Soit $\mathbb{T}$ un corps de transséries de force n et $k \leqslant n$. Alors il existe une extension $\mathbb{T}_{\exp_{\omega^k}}$ de $\mathbb{T}$, tel que $\exp_{\omega^k} f$ est défini dans $\mathbb{T}_{\exp_{\omega^k}}$, pour tout $f \in \mathbb{T}_\infty^+$.*

Théorème 1.11. *Soit $(\mathbb{T}_\alpha) = (C[[\mathfrak{M}_\alpha]])$ une suite croissante de corps de transséries de force n. Alors $C[[\bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha]]$ est également un corps de transséries de force n.*

Pour construire la clôture d'un corps de transséries de force n par $\exp, \exp_\omega, \ldots, \exp_{\omega^n}$, on applique en alternance les théorèmes 1.10 et 1.11. Contrairement au cas classique, cette construction pourrait *a priori* dépendre de la succession des choix des k pour lesquels on applique le théorème 1.10. Heureusement, il n'en est rien, du fait que les transtermes de forces supérieures admettent des représentations uniques en arbre. Un exemple d'une telle représentation est

$$\exp_{\omega^2}(x \exp_\omega x + \exp_\omega^{-1} \log x) \longrightarrow \begin{array}{c} \exp_{\omega^2}(x \exp_\omega x + \exp_\omega^{-1} \log x) \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{c} x \exp_\omega x \\ \swarrow \quad \downarrow \\ x \quad \exp_\omega x \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exp_\omega^{-1} \log x \\ \downarrow \\ -\exp_\omega(\log x - 1) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \log x \quad -1 \end{array} \end{array}$$

On observera que pour chaque noeud étiquetté par $\tau = c\,\mathfrak{m}$, il existe un k, tel que les enfants du noeud soient étiquettés par les termes de $\log_{\omega^k} \mathfrak{m}$. L'entier k est unique avec la propriété que $\log_\alpha \mathfrak{m}$ est un transmonôme pour tout $\alpha < \omega^k$.

1.3.4 Opérations sur les transséries de force supérieure

Actuellement, nous sommes en train de démontrer que l'on peut munir des corps de transséries de force supérieure de dérivations et de compositions. Notre démarche est essentiellement analogue au cas des transséries classiques, bien que la rédaction soit plus technique.

1.3.5 Résolution d'équations fonctionnelles

Dans son livre sur les fonctions analysables, M. Écalle a montré comment résoudre des équations de composition pour des transséries de forces supérieures. Nous pensons que ses résultats se formalisent avantageusement dans le cadre présenté dans ce chapitre.

1.4 Transséries imbriquées

Bien que les transséries de force supérieure permettent la résolution d'équations d'itération et, plus généralement, la résolution des équations de composition, elles ne suffisent toujours pas pour la résolution d'équations fonctionnelles générales comme

$$f(x) = e^{\sqrt{x} + f(\log x)}. \tag{1.5}$$

Algébriquement, les solutions fortement monotones se présentent naturellement comme transséries imbriquées du genre

$$f(x) = e^{\sqrt{x} + e^{\sqrt{\log x} + e^{\sqrt{\log \log x} + \cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}. \tag{1.6}$$

Toutefois, il faut vérifier si de telles expressions réflètent de façon adéquate la réalité analytique et, si oui, comment développer un calcul cohérent.

D'une part, nous avons démontré que l'on peut effectivement adjoindre des expressions comme (1.6) à des corps de transséries et développer un calcul cohérent dans ce cadre. D'autre part, j'ai découvert que de telles expressions sont intrinsèquement ambiguës dans le sens que l'on pourrait très bien avoir deux solutions distinctes f et $\hat{f}$ à l'équation (1.5), qui se développent chacune sous la forme (1.6).

1.4.1 Résolution analytique des équations "imbriquées"

Afin de donner un sens analytique aux expressions comme (1.6), il est instructif de

1. Chercher la solution générale à l'équation (1.5) et pas seulement une solution particulière.

2. Comparer la forme de la solution générale à (1.5) avec la solution générale de l'équation d'itération

$$\log_\omega x = \log_\omega \log x + 1. \tag{1.7}$$

1.4.1.1 Itération du logarithme

Nous avons déjà vu dans la section 1.3.1 qu'il existe des itérateurs réels analytiques de l'exponentielle ; leurs inverses sont des solutions réelles analytiques de (1.7). Par ailleurs, si $\log_\omega$ désigne une solution particulière de (1.7), la solution générale est donnée par

$$\widehat{\log}_\omega x = \log_\omega x + \varphi(x), \tag{1.8}$$

où φ est une fonction log-périodique, c.à.d. que $\varphi(x)=\varphi(\log x)$, pour tout x suffisamment grand, ou encore que $\varphi(x)=\psi\circ\log_\omega$ pour une certaine fonction 1-périodique ψ. Comme les seules fonctions log-périodiques fortement monotones sont les constantes, la solution générale fortement monotone de (1.7) est donnée par

$$\widehat{\log_\omega} x=\log_\omega x+\alpha, \tag{1.9}$$

si $\log_\omega x$ est supposé fortement monotone. Nous en tirons deux conclusions :

1. Formellement, dans un corps de transséries de force 1, la solution générale à l'équation (1.7) est donnée par (1.9).
2. Il n'y a pas d'itérateur réel analytique fortement monotone privilégié du logarithme. La latitude du choix est régie par (1.8).

La situation est illustrée dans la figure 1.1. L'aspect oscillant des courbes à droite ne devrait pas tromper le lecteur : pour les besoins de l'illustration, nous avons rapproché les ordonnées $x_0, e^{x_0}, e^{e^{x_0}}$ et $e^{e^{e^{x_0}}}$. En, réalité ces ordonnées s'écartent de façon très explosive, avec comme effet l'aplatissement des courbes. Cette remarque forme une explication plus intuitive de la non-existence actuelle d'un itérateur fortement monotone privilégié du logarithme.

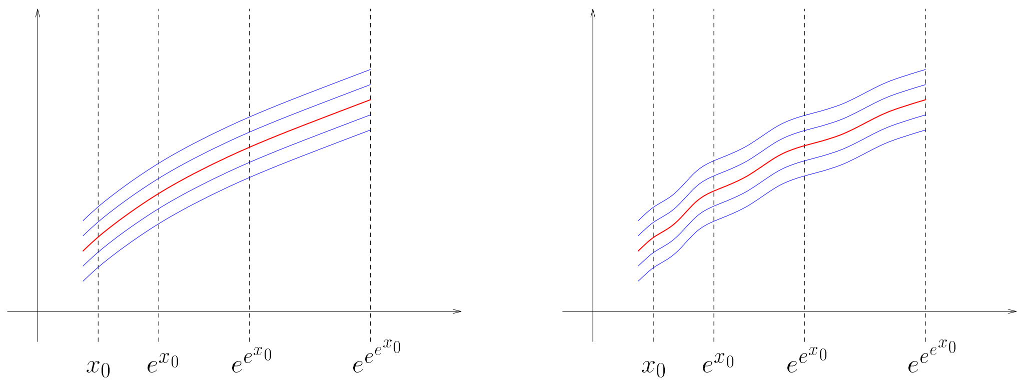


Figure 1.1. Esquisse de deux familles $\log_\omega x+\alpha$ et $\widehat{\log}_\omega x+\alpha$ de solutions fortement monotones à l'équation d'itération (1.5). Chaque famille est uniquement déterminée (à paramétrage près) par une solution particulière, ici en rouge.

1.4.1.2 Sur la solution générale de l'équation (1.5)

La solution générale de (1.5) se décompose en deux familles. La première famille, qui ne nous intéresse pas ici, comporte les solutions

$$f_\alpha=\exp_\alpha x-e^{x/2}-\frac{e^{e^x/2}}{\exp_{\alpha+1} x}-\cdots \not\succ e^{\sqrt{x}},$$

où $\alpha\geqslant 1$ et $\exp_\alpha x=\exp_\omega(\log_\omega x+\alpha)$. Notez que ces développements convergent vers des fonctions quasi-analytiques. Notez aussi que f_α est une transsérie classique si $\alpha\in\mathbb{N}^*$.

La grande différence entre les équations (1.5) et (1.7) est qu'il n'y a pas de formule explicite pour la deuxième famille de solutions générales de (1.5) en fonction d'une solution particulière. En revanche, étant donnée une "famille de solutions générales" (f_α), avec $\log f_\alpha \sim \sqrt{x}$ pour tout α, chaque autre famille de solutions générales est donnée par

$$\hat{f}_\beta(x) = f_{\varphi(\beta,x)}(x),$$

où φ est un champs log-périodique : $\varphi(\beta, x) = \varphi(\beta, \log x)$, pour tout x suffisamment grand. En particulier, les deux familles peuvent avoir autant de membres en commun que l'on souhaite, sans être identiques. Cette situation est illustrée dans la figure 1.2. Nous en tirons les conclusions suivantes :

1. L'équation (1.5) peut avoir une infinité de solutions f_α avec $\log f_\alpha \sim \sqrt{x}$. L'écriture (1.6) ne permet pas de distinguer des solutions f_α et f_β avec $\alpha \neq \beta$.
2. La latitude de choix pour des solutions réelles analytiques fortement monotones privilégiées de (1.5) est plus importante que pour les itérateurs du logarithme. En particulier, la solution générale fortement monotone n'est pas déterminée en fonction d'une ou plusieurs solutions privilégiées.

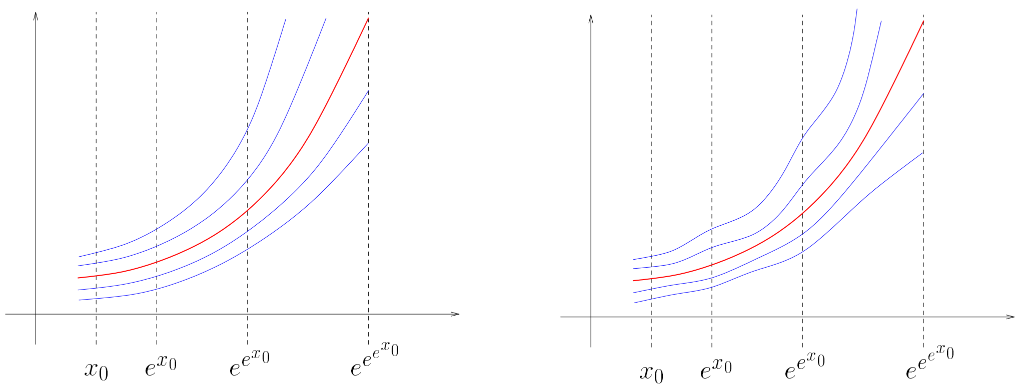


Figure 1.2. Esquisse de deux familles f_α et $\hat{f}_\alpha$ de solutions fortement monotones à l'équation fonctionnelle (1.5), qui diffèrent par un "champ log-périodique"; deux familles distinctes peuvent comporter des solutions communes, ici en rouge.

1.4.1.3 Solutions quasi-analytiques

Afin d'obtenir des solutions quasi-analytiques de (1.5), on procède en plusieurs étapes. D'abord on perturbe la fonction logarithmique de façon qu'elle admette un point fixe. Plus précisement, en écrivant $g = f \circ \varphi$, où φ vérifie

$$\varphi(\log x + \alpha) = \log \varphi(x), \tag{1.10}$$

et où $x_0 = \log x_0 + \alpha$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (1.5) se transforme en

$$\log g(x) = \sqrt{\varphi(x)} + g(\log x + \alpha). \tag{1.11}$$

Les solutions quasi-analytiques de (1.10) sont de la forme $\varphi(x) = \exp_\omega \circ \psi \circ \log_\omega$, avec

$$\psi(x) = \psi(x + 1 + \xi(x)) - 1, \tag{1.12}$$

où $x+1+\xi(x)$ est l'inverse fonctionnelle de

$$\log_\omega(\log\exp_\omega x+\alpha)=x-1+\frac{\alpha}{\exp_\omega(x-1)\exp_\omega(x-2)\cdots}+\cdots.$$

Les solutions de (1.12) sont de la forme $\psi(x)=x+\lambda+\varepsilon(x)$, avec

$$\varepsilon(x)=\xi(x)+\varepsilon(x+1+\xi(x))=\xi(x)+\xi(x+1)+\cdots. \tag{1.13}$$

Dans un deuxième temps, il s'agit de résoudre l'équation (1.11). Pour ce faire, on considère d'abord l'équation perturbée

$$\log h(x)=\sqrt{\varphi(x)}+h(\log x+\alpha)+\beta, \tag{1.14}$$

où β est choisi convenablement de façon que (1.14) puisse se résoudre par un théorème d'itération autour du point fixe x_0. En utilisant l'équation fonctionnelle (1.14), cette solution est ensuite prolongée jusqu'à l'infini. Les solutions de (1.11) s'écrivent maintenant sous la forme $g(x)=h(x)\,(1+\varepsilon(x))$, où

$$\varepsilon(x)=\frac{1+\varepsilon(x)}{g(x)}\,(\beta+\log(1+\varepsilon(e^{x-\alpha})))=\frac{\beta}{g(x)-\beta}+\cdots. \tag{1.15}$$

Nous ignorons actuellement si l'équation (1.5) admet des solutions réelles analytiques.

1.4.2 Vers une théorie des transséries imbriquées

D'un point de vue algébrique, nous aimerions construire des corps de transséries dans lesquels on peut résoudre des équations comme (1.5). Nous avons démontré qu'étant donné un corps de transséries $\mathbb{T}$ et des suites $(\varepsilon_1,\varphi_1),(\varepsilon_2,\varphi_2),\ldots$, avec $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\in\{-1,1\}$ et $\varphi_1,\varphi_2,\ldots\in\mathbb{T}$, qui vérifient certaines conditions sur leurs supports, il est possible de construire un corps de transséries $\mathbb{T}_{\varepsilon,\varphi}$, qui contient l'expression formelle

$$\varepsilon_1\,e^{\varphi_1+\varepsilon_2 e^{\varphi_2+\varepsilon_3 e^{\varphi_3+\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}. \tag{1.16}$$

En outre, des dérivations sur $\mathbb{T}$ s'étendent de façon naturelle à $\tilde{\mathbb{T}}$. En revanche, il y a un problème pour la définition d'une composition. À mon avis, deux approches peuvent êtres poursuivies :

1.4.2.1 L'axiome de non ambiguïté des transséries imbriquées

La première approche consiste à demander que chaque corps des transséeries vérifie l'axiome supplémentaire de la non ambiguïté des transséries imbriquées. Cet axiome postule que deux transséries, qui admettent le même développement imbriqué de la forme (1.16), sont nécessairement égales.

Nous avons démontré l'existence de la "clôture imbriquée" $\tilde{\mathbb{T}}$ d'un corps de transséries $\mathbb{T}$ dans ce cadre et j'ai bon espoir qu'il est possible d'étendre de façon unique des opérateurs de postcomposition de $\mathbb{T}$ à $\tilde{\mathbb{T}}$. Par ailleurs, je conjecture qu'il existe un théorème de fonctions intermédiaires pour des fonctionnelles générales dans ce cadre.

1.4.2.2 Inclusion de transséries imbriquées dans la signature de $\mathbb{T}$

Malheureusement, les considérations de la section 1.4.1 montrent que cette première approche n'est pas entièrement satisfaisante, puisque des expressions comme (1.6) sont intrinsèquement ambiquës d'un point de vue analytique. Même si cet inconvénient n'est pas nécessairement gênant pour l'obtention de théorèmes de valeurs intermédiaires, il le devient lorsque l'on souhaite démontrer des théorèmes de modélisation.

La deuxième approche consiste à ne plus postuler l'axiome de non ambiguïté des transséries imbriquées. En contrepartie, pour que l'on puisse définir des opérateurs de composition, on demandera que chaque nouvelle transsérie imbriquée fasse partie de la signature de $\mathbb{T}$. Une axiomatique précise pour ce cadre reste à être développée. Outre les analogues aux axiomes **T1**, **T2**, **T3** et **T4**, je m'attend à un axiome d'ordre du genre $f_1 < f_2 \Rightarrow f_1 \circ g < f_2 \circ g$.

Remarque 1.12. Nous avons vérifié qu'il existe des corps de transséries qui violent l'axiome de la non ambiguïté des transséries imbriquées. Par ailleurs, il ne faut pas confondre des expressions imbriquées (1.6) avec des représentations en arbre. En effet, les premiers peuvent être ambiguës, mais pas les seconds, car on garde la trace précise de l'origine des termes par leur étiquetages. En effet les représentations en arbres de deux solutions f_α et f_β distictes de (1.5) sont données par